ISSN 0130-2221

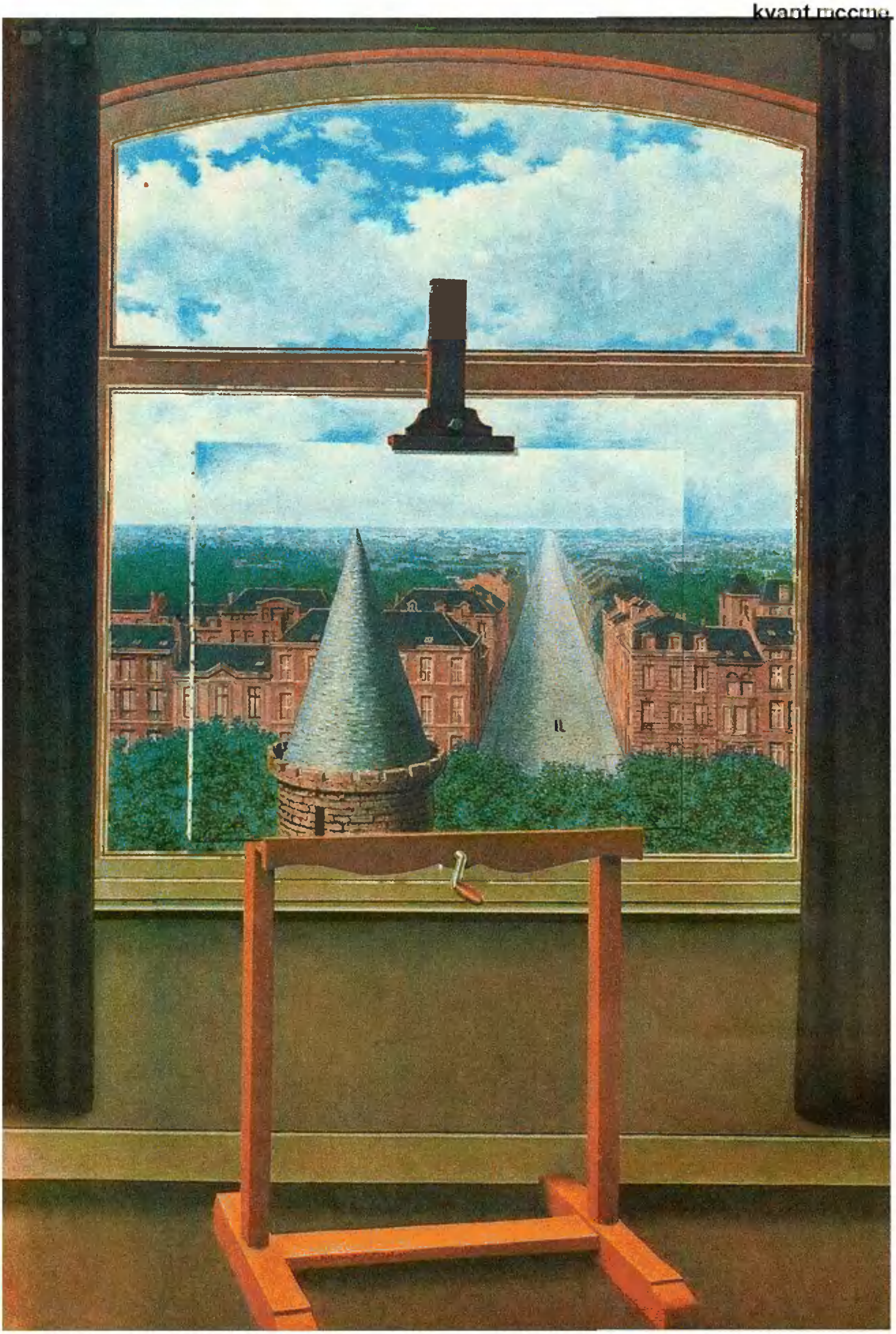
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Искусственная радуга

1988



Квант

Основан в 1970 году

1988
6

В номере:

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

25 июня 1988 года исполняется 60 лет члену редколлегии нашего журнала выдающемуся советскому физику-теоретику, лауреату Ленинской и Государственной премий, академику А. А. Абрикосову. Он является автором многих открытий. Пожалуй, наиболее известное из них — предсказание существования сверхпроводников второго рода и исследование их магнитных свойств.
Ему принадлежит ряд замечательных результатов в области квантовой теории поля и астрофизики, теории металлов и полупроводников, молекулярной физики, теории плазмы, магнетизма...
Мы поздравляем Алексея Алексеевича с юбилеем, желаем ему здоровья и новых творческих успехов.
В этом номере мы предлагаем нашим читателям статью А. А. Абрикосова, которая посвящена проблемам, занимающим сегодня в физике чрезвычайно важное место. Эта статья представляет собой, по существу, запись доклада, сделанного А. А. Абрикосовым осенью 1987 года в Политехническом музее в Москве. Не все в статье может быть понято школьником. Однако вдумчивое ее прочтение дает возможность «из первых рук» получить представление о том замечательном открытии, сообщения о котором вот уже второй год не сходят со страниц газет и журналов всего мира.

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ:

история, современные представления, последние успехи

Академик А. А. АБРИКОСОВ

Явление сверхпроводимости было открыто голландским физиком Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Камерлинг-Оннесу первому удалось получить жидкий гелий, и он использовал его для создания криостатов — приборов, в которых можно поддерживать очень низкую температуру. В частности, он решил проверить правильность существовавших в то время представлений о поведении электрического сопротивления при низких температурах. Измеряя сопротивление ртути, Камерлинг-Оннес обнаружил, что оно скачком обращается в нуль при температуре около 4 К. Это явление было названо сверхпроводимостью, а температура перехода в сверхпроводящее состояние — критической. В настоящее время известно много сверхпроводников с самыми разными критическими температурами, от долей градуса до примерно 100 К. Но о последних я скажу позже.

Последующие исследования сверхпроводников позволили обнаружить многие их замечательные свойства. Так, оказалось, что сверхпроводимость разрушается магнитным полем. Критическое поле, при котором это происходит, зависит от температуры. Далее обнаружилось, что сверхпроводимость исчезает и в том случае, когда по образцу пропускают достаточно большой ток. Наконец, был обнаружен так называемый эффект Мейснера, суть которого заключается в следующем. Если поместить металл в не очень сильное магнитное поле и понижать температуру, то при переходе металла в сверхпроводящее состояние силовые линии поля вытолкнутся из него. Последующее изучение показало, что на самом деле при таком переходе у поверхности сверхпроводника возникает небольшой слой, толщиной 10^{-5}—10^{-6} см, в котором циркулируют токи, полностью экранирующие внутренние области образца от внешнего поля. Толщина этого слоя называется глубиной проникновения.

Я не буду перечислять все факты,

свидетельствующие о свойствах сверхпроводников. Их было обнаружено много. Но тем не менее само явление оставалось таинственным. Более того, существовало некое принципиальное обстоятельство, которое, как казалось, делало сверхпроводимость невозможной.

В 1937 году П. Л. Капица открыл явление сверхтекучести жидкого гелия — его способность протекать по узким капиллярам без всякого трения. Через четыре года Л. Д. Ландау сумел объяснить это явление. В теории Ландау был выведен так называемый критерий сверхтекучести, согласно которому вязкость могла возникать при движении со скоростью, превышавшей некоторую критическую. Опишу это качественно. Торможение гелия означает изменение его энергии и импульса. Однако жидкий гелий является квантовой жидкостью и может менять энергию и импульс, поглощая и излучая определенные кванты, названные квазичастицами. Эти квазичастицы ведут себя в объеме тела как настоящие частицы, правда, с необычной связью между энергией и импульсом. Различие между ними и обычными частицами — электронами, фотонами — заключается в том, что вне тела квазичастицы существовать не могут. В жидком гелии такие частицы могут появляться лишь тогда, когда скорость течения гелия выше определенной конечной величины.

Казалось бы, отсюда легко перейти к объяснению сверхпроводимости как сверхтекучести заряженной электронной жидкости в металлах. Однако свойства квазичастиц, возникающих в электронной жидкости, оказались отличными от свойств квазичастиц в жидком гелии. Так, для них критическая скорость равна нулю, и, следовательно, протекание тока без сопротивления оказывается вообще невозможным. В чем же разница между этими двумя жидкостями — жидким гелием и электронной жидкостью? Она, прежде всего, заключается в том, что собственный момент вращения, называемый спином, у атомов гелия равен нулю, а у электронов $\hbar/2$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Поэтому сразу встал вопрос, не могут ли электроны объединяться в пары. У таких пар полный спин был бы равен либо нулю (спины электронов направлены в противоположные стороны), либо $\hbar$. Подобные пары квазичастиц в электронной жидкости могли бы напоминать квазичастицы жидкого гелия, и можно было бы надеяться объяснить явление сверхпроводимости по аналогии со сверхтекучестью. Однако электроны — одноименно заряженные частицы, благодаря кулоновскому взаимодействию они отталкиваются, и никакой причины для объединения в пары, казалось бы, нет.

Лишь в 1950 году был произведен эксперимент по измерению критических полей $B_{кр}$ и температур $T_{кр}$ образцов ртути разного изотопического состава, который пролил свет на возможные причины образования пар. Выяснилось, что величины $T_{кр}$ и $B_{кр}$ зависят от массы изотопа по закону

$$T_{кр},\ B_{кр} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Но масса ядер, образующих кристаллическую решетку, проявляется лишь в их движении. Таким образом, стало ясно, что это движение существенно для сверхпроводимости. Основываясь на этом факте, английский физик Г. Фрёлих и независимо от него американский физик Дж. Бардин предложили концепцию, объясняющую природу сил притяжения между электронами. Дело в том, что ядра, а точнее ионы, образующие кристаллическую решетку металла, тоже являются квантовой системой, и в этой системе также имеются квазичастицы, соответствующие колебаниям решетки. Они называются фононами. Электроны могут обмениваться фононами, и это обязательно приводит к притяжению, которое может превзойти непосредственное кулоновское отталкивание.

Однако даже после того, как была высказана эта идея, оставалось неясно, как благодаря такому притяжению возможно образование пар из электронов. Согласно квантовой механике, для этого силы притяжения должны быть достаточно большими и действовать на большом расстоянии. Иначе кинетическая энергия электронов растащит их в разные стороны. Выход из этого положения нашел американский физик Л. Купер, который обратил внимание на тот факт, что речь идет об образовании пар не из двух изолированных электронов, а в присутствии всей совокупности других электронов. Можно сказать и иначе: пары образуются не из электронов, а из квазичастиц электронной жидкости. Эти пары по имени их открывателя стали называть куперовскими.

Через год, в 1957 году, Бардиным, Купером и Р. Шриффером и независимо от них академиком Н. Н. Боголюбовым была построена микроскопическая теория сверхпроводимости, которая связала воедино все известные опытные факты о свойствах сверхпроводников.

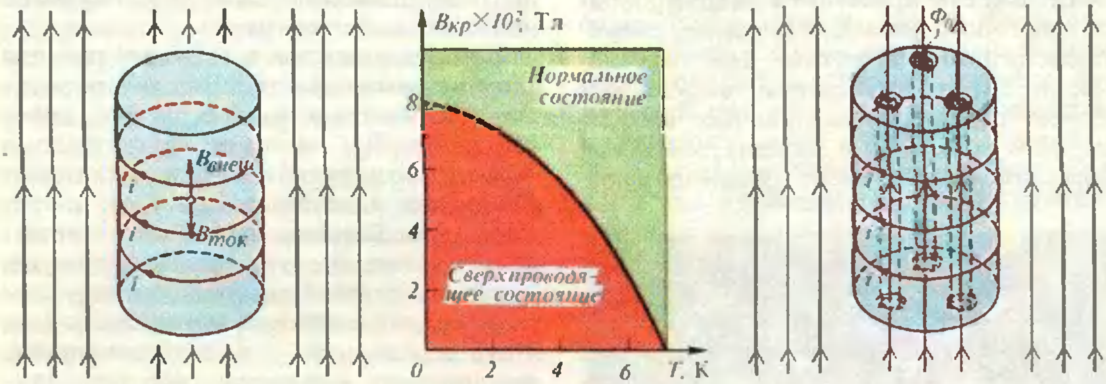
Я не буду излагать здесь эту теорию ввиду ее сложности. Отмечу лишь несколько важных обстоятельств. Прежде всего, если система находится при $T=0$, то передать ей энергию можно лишь разорвав пару. Это требует затраты конечной энергии, которую обозначают 2Δ. В связи с этим электронная теплоемкость при низких температурах ведет себя как $e^{-\Delta/T}$. Второе: я уже отмечал, что для связывания электронов в пары существенно наличие всего электронного коллектива. Но состояние этой системы зависит от температуры. Поэтому энергия связи пары 2Δ зависит от температуры и при $T=T_{\text{кр}}$ $\Delta(T)$ обращается в нуль — сверхпроводник становится нормальным металлом.

Третье свойство связано с тем, что пары имеют конечный размер, порядка 10^{-4}—10^{-5} см. Возникает вопрос: как же они не мешают друг другу? Ведь среднее расстояние между электронами в металле порядка 10^{-8} см. Этот парадокс является проявлением квантовых свойств вещества. Один из авторов микроскопической теории сверхпроводимости Шриффер для сравнения уподобил электроны в сверхпроводнике танцорам в современной дискотеке. Двое танцуют, и хотя между ними еще много других танцоров, они не теряют связь друг с другом. Поэтому точнее говорить не о парах, а о парной корреляции электронов в сверхпроводнике.

Я уже говорил вам о том, что, когда внешнее магнитное поле сравнивается с критическим, сверхпроводник скачком переходит в нормальное состояние. Это утверждение, строго говоря, справедливо лишь для цилиндрического образца в продольном поле и притом не для всех сверхпроводников. Действительно, почему бы массивному сверхпроводнику не разбиться на тонкие слои нормального и сверхпроводящего металла и не сохранить сверхпроводимость до гораздо бо́льших полей? Ведь критическое поле для тонкого слоя выше, чем для массивного сверхпроводника. Разбиение на слои не происходит потому, что во всех чистых сверхпроводниках, состоящих из одного металла, существует особая поверхностная энергия, возникающая на границах между нормальной и сверхпроводящей фазами. Эта энергия, подобно поверхностному натяжению, стремится уменьшить поверхность границ. Микроскопическая теория объяснила ее происхождение. Оказалось, что она связана с конечным размером куперовских пар. Если уменьшать этот размер, то поверхностная энергия может изменить знак и сделаться отрицательной. Тем самым возникает естественное разделение сверхпроводников на сверхпроводники первого рода — с положительной поверхностной энергией и сверхпроводники второго рода — с отрицательной поверхностной энергией. Надо заметить, что сверхпроводники второго рода являются гораздо более распространенными, чем сверхпроводники первого рода. Мало того: любой сверхпроводник первого рода можно перевести во второй род. Для этого достаточно ввести в него некоторое количество атомов примеси или как-нибудь иначе испортить кристаллическую решетку. Электроны начинают рассеиваться на этих дефектах. Характер движения электронов меняется, и размер пар становится меньше. При достаточной концентрации дефектов сверхпроводник первого рода обязательно переходит во второй род.

Теперь я немного расскажу о свойствах сверхпроводников второго рода. Поскольку поверхностная энергия в них отрицательна, то ничто не препятствует бесконечному расщеплению их объема на нормальные и сверхпроводящие области. Поэтому сверхпроводимость в них с увеличением внешнего магнитного поля вытесняется постепенно, начиная с некоторого значения поля $B_{кр.1}$. Переход в нормальное состояние осуществляется в верхнем критическом поле $B_{кр.2}$. Физический смысл $B_{кр.2}$ заключается в следующем. В магнитном поле электроны, будучи заряженными частицами, движутся по спиральным траекториям, и радиус спирали обратно пропорционален B. Если радиус спирали становится меньше размера пары, то пара уже не может существовать и разваливается. Если же внешнее магнитное поле ниже $B_{кр.2}$, но выше $B_{кр.1}$, то оно частично проникает в сверхпроводник. Происходит это за счет возникновения в сверхпроводнике вихревых токов. Оказывается, что эти вихри являются квантовыми объектами. Каждый из них несет квант магнитного потока. Если хотите, можно сказать, что число силовых линий, проходящих в каждом таком вихре, строго определенное. Квант потока является очень малой величиной и равен $\Phi_0 = \pi h/e = 2 \cdot 10^{-15}$ Вб.

При уменьшении внешнего поля вихри расходятся и в поле $B_{кр.1}$ исчезают из сверхпроводника совсем.



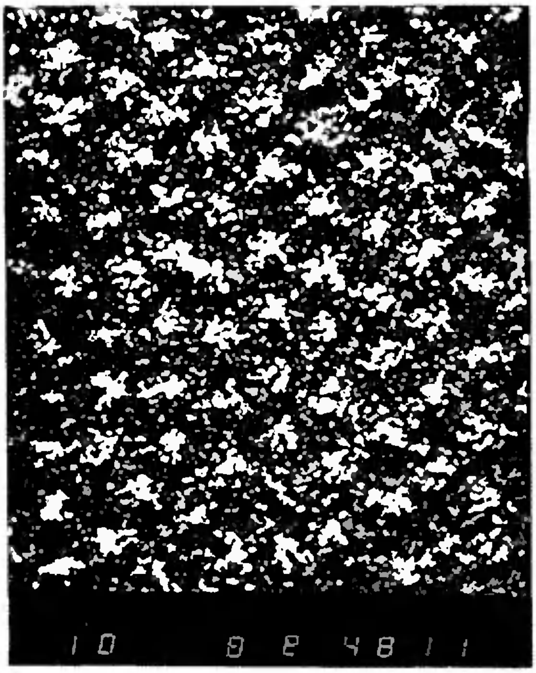
Металлический цилиндр, охлаждаемый до низкой температуры, находится в сверхпроводящем состоянии. При включении магнитного поля на поверхности цилиндра индуцируются круговые токи, которые создают в цилиндре магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{ток}$, равной по величине и противоположной по направлению индукции $\vec{B}_{внеш}$ внешнего поля. Эти круговые токи — сверхпроводящие и не затухают со временем. Поэтому в толще сверхпроводника суммарная индукция равна нулю: $\vec{B}_{внеш}+\vec{B}_{ток}=\vec{0}$. Линии индукции магнитного поля не проникают в сверхпроводник.

Чем больше индукция внешнего поля, тем больший ток должен течь по поверхности, чтобы обеспечить экранировку внутренней области металлического сверхпроводника от внешнего поля. При некотором критическом значении индукции внешнего поля $B_{кр}$ поле проникает внутрь образца, сверхпроводимость разрушается — металл переходит в нормальное состояние. Для такого перехода не обязательно внешнее магнитное поле. Ток, текущий по поверхности сверхпроводника, сам создает магнитное поле, и когда $B_{ток}$ достигает значения, соответствующего $B_{кр}$, сверхпроводимость разрушается. Величина $B_{кр}$ растет с уменьшением температуры, но даже вблизи $T=0$ значение $B_{кр}$ у чистых сверхпроводящих металлов невелико — не более десятых долей тесла.

В сверхпроводящих сплавах, так же как в ряде сверхпроводящих соединений, при некотором значении индукции $B_{кр.1}$ поле начинает проникать внутрь сверхпроводника. В толще образца появляются отдельные сгустки линий магнитной индукции. Каждый такой сгусток окружен кольцевыми незатухающими токами, напоминающими вихри в жидкости или в газе. Эти сгустки и называют вихрями. Внутри вихря сверхпроводимость разрушена, но в пространстве между вихрями она сохраняется. С увеличением индукции магнитного поля число вихрей растет. При некотором значении индукции $B_{кр.2}$ вихри начинают перекрываться, поле «заполняет» образец, сверхпроводимость полностью разрушается. Сверхпроводники с такими свойствами называют сверхпроводниками второго рода.

Фактически поле $B_{кр.1}$ — это то поле, при котором один вихрь еще может существовать в сверхпроводнике. Область между полями $B_{кр.1}$ и $B_{кр.2}$ называется смешанным состоянием. В этом состоянии сверхпроводник пронизан вихревыми нитями — миниатюрными соленоидами, расположенными в правильном порядке. В поперечном срезе они образуют треугольную решетку. Каждый вихрь имеет сердцевину, размер которой равен размеру куперовской пары; эту сердцевину можно считать областью нормального металла.

Очень существенным оказывается то обстоятельство, что, увеличивая концентрацию дефектов, можно увеличивать критическое поле $B_{кр.2}$, вплоть до которого по образцу может течь свехпроводящий ток. Это дает возможность применять сверхпроводники второго рода для создания сверхпроводящих магнитов. Действительно, в сверхпроводящем кольце ток может циркулировать вечно. Можно сделать соленоид и замкнуть его накоротко. Это и будет сверхпроводящий постоянный магнит. Отличие от обычного электромагнита заключается в том, что в обычном магните энергия тока в конечном итоге тратится на разогрев обмотки. Из-за этого приходится делать громоздкую и дорогостоящую систему охлаждения. Именно это обстоятельство ограничивает возможности электромагнитов полями до 5—6 Тл. А с помощью сверхпроводящих магнитов уже сегодня можно получать поля до 10—12 Тл (Nb — Zr — Ti) и даже до 23 Тл (Nb_3Sn). В настоящее время сверхпроводящие магниты используются в генераторах, для создания магнитной подушки в поезде-экспрессе, в ускорителях элементарных частиц, в токамаках — приборах термоядерного синтеза, в магнитогидродинамических генераторах. Кроме того, сверхпроводящая катушка с током может служить накопителем энергии.



Фотография структуры вихрей в сверхпроводнике второго рода. Вихри образуют периодическую структуру, аналогичную кристаллической решетке.

Однако надо иметь в виду, что это дело не такое простое. Чем выше верхнее критическое поле $B_{кр.2}$, тем ниже нижнее — $B_{кр.1}$. Значит, в проволоке сверхпроводящего соленоида с током наверняка имеются вихри. Под действием силы Лоренца вихри могут прийти в движение, а это немедленно приведет к диссипации энергии, т. е. к появлению сопротивления. Выход из этого положения — как-то закрепить, пришпилить вихревую решетку, чтобы она не двигалась. Это называется «пиннингом» (от английского pin — булавка). В этом случае сверхпроводящий ток легко огибает нормальные сердцевины вихрей. Я не буду останавливаться на этом очень интересном вопросе и перейду теперь к рассказу о «слабой» сверхпроводимости.

Из квантовой механики известен так называемый туннельный эффект — возможность частицам проникать через потенциальный барьер, даже если высота этого барьера выше энергии частиц. Конечно, реально ширина барьера должна быть очень малой. Туннельный эффект был использован И. Гиэвером в 1960 году для создания туннельного контакта: два металлических электрода разделены слоем изолятора (обычно в качестве

Сверхпроводящий туннельный контакт. На стеклянную подложку (3) наносят пленку сверхпроводника (1). Затем ее окисляют — на поверхности сверхпроводника создается слой диэлектрика (2) толщиной порядка десяти ангстрем. Сверху наносят еще одну пленку (1) сверхпроводника. (Для удобства измерений сверхпроводящие пленки «укладывают» на подложку в виде креста.) С некоторой вероятностью электроны из одной пленки могут проникать в другую через диэлектрическую прослойку — это называют туннельным эффектом.

изолятора берется пленка окиси на поверхности одного из металлов). Благодаря туннельному эффекту, через такой контакт может идти ток. Если один из этих металлов является сверхпроводником, то электроны в нем объединены в пары. Но для целой пары проникновение через барьер очень маловероятно. Поэтому нужно, чтобы электрическое поле расщепило пару, и тогда уже электроны поодиночке пройдут через контакт. Минимальная *энергия на один электрон при этом* равна Δ, и следовательно, при $T=0$ протекание тока начинается лишь когда разность потенциалов между электродами достигнет такого значения U, что $eU=\Delta$. Таким способом измерили Δ.

Можно использовать и туннельный контакт из двух сверхпроводников. Однако в последнем случае возникает и некоторое новое явление. Если диэлектрическая прослойка достаточно тонкая, куперовские пары могут образовываться из электронов, принадлежащих к разным электродам. При этом создается возможность протекания через контакт не просто тока, а сверхпроводящего тока. Это явление было предсказано английским физиком Б. Джозефсоном в 1962 году и после экспериментального подтверждения было названо его именем. Критический ток Джозефсона очень маленький, плотность его не более $10^2—10^3$ А/см^2. Эту величину следует сравнить с токами в магнитах — порядка $10^5—10^6$ А/см^2 или с «теоретическим пределом» для развала пар в сверхпроводнике — порядка 10^8 А/см^2. Однако эффект Джозефсона получил новое, очень перспективное применение. Дело в том, что величина джозефсоновского критического тока оказалась необыкновенно чувствительной к внешнему магнитному полю. Это позволило создать особые сверхпроводящие устройства — джозефсоновские интерферометры, или сквиды, которые дают возможность измерить магнитные поля до 10^{-14} Тл (магнитное поле Земли $0{,}5\cdot10^{-4}$ Тл), а затем использовать это поле для измерения токов вплоть до 10^{-14} А и разностей потенциалов до 10^{-15} В. Сквиды уже применяются в биологии и медицине, ибо они дают гораздо более точные данные, чем электрокардио- или энцефалографы, и превосходят даже рентгеновские и ЯМР-томографы. Кроме того, джозефсоновские контакты могут быть использованы как для регистрации очень слабых электромагнитных излучений, так и для генерации электромагнитных волн большой частоты. Эффект Джозефсона — это большая область применений сверхпроводимости.

Трудно даже вообразить, сколько разных применений получили бы сверхпроводники, если бы не одно печальное обстоятельство. Все сверхпроводящие устройства, применяемые до сих пор, нуждаются в охлаждении жидким гелием. Стоимость одного литра этого хладагента — 10 рублей, и это очень удорожает использование сверхпроводников. Однако в последнее время появились так называемые сверхпроводящие окислы, или керамики, с критической температурой в районе 95 К. Это уже заметно выше, чем точка кипения жидкого азота (77 К), стоимость которого — 10 копеек за литр. Не исключено, что будут найдены и более высокотемпературные материалы.*)

А теперь я остановлюсь на истории открытия и свойствах таких сверх-

*) В начале 1988 года стало известно об обнаружении сверхпроводников Bi—Sr—Ca—Cu—O и Tl—Ba—Ca—Cu—O с критической температурой 105—125 К.

проводящих керамик. С 1973 года и до середины 1986 года рекорд максимальной критической температуры принадлежал пленкам из Nb_3Ge, сохранявшим сверхпроводимость вплоть до 23 К. Однако осенью 1986 года появилось сообщение физиков Г. Беднорца и А. Мюллера (Швейцария) об открытии сверхпроводимости соединения La — Ba — Cu — O с критической температурой в районе 30 К. Эти авторы не сразу подошли к своему открытию. Дело в том, что еще до них был известен сверхпроводящий окисел Ba — Pb — Bi — O с критической температурой 14 К. Странным в этом соединении было то, что плотность свободных электронов, переносящих ток, у него была 10^{21} см$^{-3}$, что на порядок меньше, чем у обычных металлов. В то же время, согласно теории Бардина — Купера — Шриффера (БКШ), значение критической температуры растет с увеличением числа свободных электронов. Ясно, что уменьшение числа электронов должно вести к уменьшению $T_{кр}$. А 14 К — это была относительно высокая критическая температура.

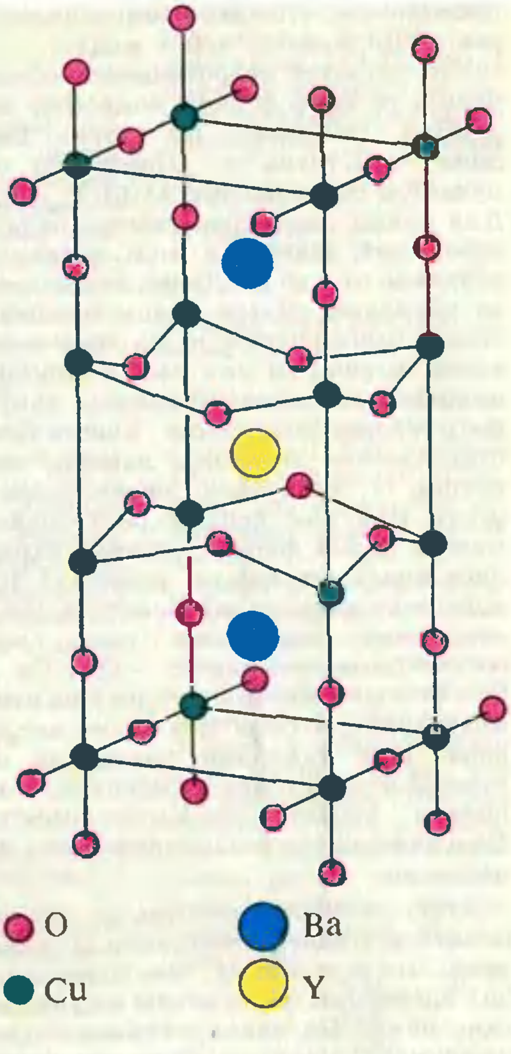
Далее внимание Беднорца и Мюллера привлекли окислы, содержащие медь в состоянии с промежуточной валентностью: часть Cu^{++}, а часть Cu^{+++}. Такие окислы изучались французскими физиками. В качестве элемента структуры в них входил редкоземельный элемент лантан. Если взять соединение La_2CuO_4, то медь в нем только двухвалентная, и это вещество ведет себя как изолятор. Мюллер и Беднорц стали заменять трехвалентный лантан двухвалентными элементами, чтобы отнять часть электронов у меди и тем самым частично перевести медь в трехвалентное состояние. В результате был получен первый высокотемпературный сверхпроводник $La_{2-x}Ba_xCuO_4$, где $x=0{,}1$—$0{,}2$. Сначала Беднорцу и Мюллеру никто не поверил, и их статью отказался печатать ведущий американский физический журнал «Physical Review Letters». Тогда они отослали ее в немецкий журнал «Zeitschrift für Physik», где она и вышла осенью 1986 года. Первоначально статья не вызвала интереса. Но потом японские специалисты решили проверить сообщение и убедились, что Мюллер и Беднорц не ошиблись. После этого указанные соединения исследовали американские физики, и с начала 1987 года разразился настоящий «сверхпроводящий бум». Сейчас имеется уже несколько тысяч статей на эту тему. Я не могу рассказать о всех деталях этой гонки, но отмечу основные моменты.

Естественно было попытаться повысить критическую температуру путем замены элементов их химическими аналогами. Замена Ba на Sr привела к $T_{кр}=45$ К. Американская группа из Хьюстона во главе с П. Чу подвергла эти образцы сжатию и обнаружила, что критическая температура быстро растет при сжатии, хотя в обычных сверхпроводниках в подобных условиях $T_{кр}$, как правило, слабо убывает. Тогда они решили попытаться устроить «химическое» сжатие, заменив атомы лантана на атомы иттрия, имеющие меньший размер. В результате было получено соединение с фантастически высокой по тем, еще недавним, временам критической температурой $T_{кр}\sim 93$ К.

Идея о «химическом сжатии» помогла сделать открытие, но в конце концов оказалась неправильной. Очень тщательное исследование показало, что высокотемпературным сверхпроводником является фаза «1 — 2 — 3»: $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, где x меньше единицы. Последующие попытки замены Y другими элементами показали, что сверхпроводимость с $T_{кр}\sim 90$ К наблюдается у соединений со структурой «1 — 2 — 3», где вместо иттрия может стоять осмий и почти все редкие земли, включая лантан.

Теперь я расскажу о некоторых особенностях этих соединений и о попытках теоретического объяснения высоких $T_{кр}$. Прежде всего — о структуре. В обоих типических соединениях La — Ba — Cu — O и Y — Ba — Cu — O она соответствует так называемым слоистым перовскитам. Характерной их особенностью является слоистость (периоды по двум направлениям порядка 2,8 Å, а по третьему 12 Å). В медных «слоях» каждый атом меди окружен октаэдром атомов кислорода. Расчеты показывают, что основная проводимость происходит по слоям медь — кислород в результате перекрытия *d*-оболочек меди с *p*-оболочками кислорода. Атомы редкой земли роли, по-видимому, не играют: «свободные» электроны туда просто не заходят. Далее, оба вещества имеют в принципе две модификации: тетрагональную и орторомбическую. В первой элементарная ячейка имеет вид правильной четырехгранной призмы, а во второй — прямоугольного параллелепипеда с произвольными длинами ребер. Но отличие от тетрагональности небольшое. Интересно отметить, что чистый La_2CuO_4 при низких температурах является орторомбическим, но добавление Ba подавляет этот переход, и вещество остается тетрагональным. Наоборот, иттриевое соединение 1 — 2 — 3 при низких температурах является орторомбическим. В принципе его можно получить и в тетрагональной модификации, изгнав из него часть кислорода путем нагрева, но эта модификация — не сверхпроводник.

Что касается поведения в магнитном поле, то новые вещества являются экстремальными сверхпроводниками второго рода, ибо нижнее поле $B_{кр\,1}$ в них порядка 10^{-2} Тл, а верхнее $B_{кр\,2}$ при низких температурах оценивается как 10^2 Тл. Надо заметить, что эти вещества хрупкие, и не так просто сделать из них проволоку для сверхпроводящего магнита. Другим отрицательным свойством является то, что критическая плотность тока в них порядка 10^2—10^3 А/см^2. Более того, это значение очень быстро падает при помещении веществ во внешнее магнитное поле. Согласно последним исследованиям, это связано с тем, что новые вещества состоят из сверхпроводящих зерен, разделенных изолирующими прослойками. Через эти прослойки возможен небольшой джозефсоновский ток, который легко подавляется магнитным полем. Правда, в пленках, состоящих из ориентированных кристаллитов, получена критическая плотность тока до 10^6 А/см^2 при температуре кипения жидкого азота ($T = 77$ К), но пленки не могут служить обмотками для сверхпроводящих магнитов. В настоящее время усилия многих лабораторий мира сосредоточены на попытках получить монокристаллы новых сверхпроводников. Удалось сделать пластинки со стороной до 1 см и толщиной до 3 мм. Исследование таких образцов подтверждает, что это вещества слоистые: сопротивление поперек слоев в десятки раз превышает сопротивление вдоль них. Кстати, отмечу, что в нормальном состоянии это плохие



Структура кристаллической решетки соединения Y—Ba—Cu—O.

проводники: удельное сопротивление раз в 100 больше, чем у меди.

Что касается теоретических объяснений, то здесь больше вопросов, чем ответов. Например, по теории Бардина — Купера — Шриффера получается соотношение $2\Delta(0)/T_{кр}=3{,}5$. Для новых сверхпроводников разные измерения дают для этой величины значения от 3 до 12. Далее, эти вещества обладают целым рядом специфических особенностей, но не очень ясно, какие именно из них имеют принципиальное значение. Например, какую роль играет слоистость кристаллов, существенны ли атомы лантана или иттрия в механизме сверхпроводимости или они играют роль просто механической фермы, которая скрепляет кристаллическую решетку? Какова роль кислорода? Известно, что в иттриевом соединении есть слои, состоящие из цепочек Cu — O — Cu — O, а есть плоскости, в которых на атом меди приходится по два атома кислорода. При удалении кислорода он прежде всего уходит из цепочек, и вещество теряет сверхпроводимость. Но в лантановом соединении таких цепочек нет.

Итак, не очень понятно, за что зацепиться. Экспериментально установлено, что и в новых сверхпроводниках электроны объединены в куперовские пары. Но каков механизм притяжения? Механизм передачи фононов — квантов колебаний решетки — влечет за собой изотопический эффект, т. е. изменение $T_{кр}$ с переходом к другому изотопу. Были сделаны измерения на образцах с заменой изотопа O^{16} на O^{18}. У лантанового соединения эффект наблюдался, хотя и меньше, чем предсказывала теория БКШ. Но у иттриевого 90-градусного сверхпроводника, так же как и у такого же вещества с европием вместо иттрия, этого эффекта практически нет. Отсюда делается вывод, что помимо давно известного фононного существует другой механизм передачи взаимодействия между электронами. В принципе, в веществе могут существовать квазичастицы и иных типов — например, связанные с возбуждением электронов, удаленных от проводящих слоев. Они называются плазмонами. Есть и другая идея: вещество может находиться близко к переходу в магнитоупорядоченное состояние. В этом состоянии есть свои квазичастицы — магноны. Но даже если нет настоящего упорядочения, то оно может возникать в виде флуктуации и создавать взаимодействие электронов. Появились теории, использующие это обстоятельство.

Я не могу перечислить всех теорий — их очень много. Отмечу еще только очень интересную концепцию двухэлектронных центров. Известно, что кислород очень легко уходит из новых сверхпроводников, в то время как в обычных окислах он связан очень прочно. Есть концепция, согласно которой два электрона могут сразу уйти с атомов кислорода на медь; это делает кислород нейтральным и тем самым облегчает его выход из решетки. А то обстоятельство, что электроны находятся то в коллективизированном металлическом состоянии, то оказываются попарно локализированными на кислороде, приводит к их притяжению.

Итак, сейчас наступило время исследований и поисков как механизма высокотемпературной сверхпроводимости, так и способов практического применения новых сверхпроводящих материалов. Исследования ведутся очень большими силами, и не исключено, что они увенчаются успехом. Однако одно важное дело открытие высокотемпературных сверхпроводников уже сделало: оно уничтожило многолетний предрассудок, что сверхпроводимость обязательно требует низких температур. Это окрыляет людей на дальнейшие поиски, и даже в том случае, если не удастся «приручить» обнаруженные сверхпроводящие керамики, обязательно будут найдены другие классы сверхпроводников с более высокими $T_{кр}$ и более пригодные для практического использования.

Музыкальные пульсары

Среди известных сегодня пульсаров — быстровращающихся нейтронных звезд, блеск которых периодически изменяется, можно выделить пять особых. Периоды их вращения, а значит, и периоды повторения импульсов излучения измеряются несколькими миллисекундами. Это так называемые миллисекундные пульсары*); последний из них открыт совсем недавно — в прошлом году.

Чем же интересна эта группа пульсаров?

Основные характеристики миллисекундных пульсаров можно свести в таблицу:

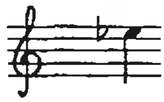
координаты α δ	период (мс) p	увеличение периода за секунду p'
1855+64	5,362	$0{,}16\cdot10^{-18}$
1913+16	5,903	$8{,}63\cdot10^{-18}$
1937+21	1,558	$0{,}105\cdot10^{-18}$
1953+29	6,133	$0{,}03\cdot10^{-18}$
1821−24	3,054	$<1\cdot10^{-18}$

Координаты пульсаров записаны в обычной, принятой в астрономии, форме. Так, запись 1855+64 означает, что у данного пульсара прямое восхождение составляет 18 ч 55 мин, а склонение равно 64° северной широты.

Числа в последнем столбце указывают, на сколько изменяются периоды пульсаров в течение одной секунды (p' — производная от p по времени). Увеличение периода пульсара связано с медленным затуханием его вращения из-за потерь энергии на излучение (механизм превращения кинетической энергии нейтронной звезды в энергию электромагнитного излучения пока еще до конца не выяснен). Зависимость периода от времени выражается формулой

$$p(t)=p_0+p't,$$

где p_0 — величина периода в некоторый начальный момент времени. Интересно, что если бы миллисекундный пульсар был один, написать такую формулу было бы невозможно — нет часов, которые



648 Гц

Пульсар 1937+21 «поет» ми-бемоль второй октавы.

позволили бы ее проверить с достаточной точностью. Но поскольку таких пульсаров пять, они как бы проверяют друг друга. Можно сказать, что по миру «развешаны» часы, очень точно отсчитывающие время. Сейчас серьезно обсуждается вопрос о замене атомного эталона времени астрономическим, связанным с миллисекундными пульсарами. Это одна из причин проявления интереса к миллисекундным пульсарам.

Есть и еще одна интересная особенность. Оказывается, частоты миллисекундных пульсаров по порядку величины такие же, как и частоты, соответствующие музыкальным звукам в пределах клавиатуры рояля. Основным тоном музыкальной настройки считается тон «ля» первой октавы, частота которого равна 440 Гц. Тогда третьему пульсару из нашей таблицы, имеющему частоту 642 Гц, отвечает

165 Гц

Пульсар 1953+29 «поет» ми малой октавы.

«ми-бемоль» второй октавы, а четвертому пульсару с частотой 163 Гц отвечает «ми» малой октавы. Пульсары, как идеальные камертоны, «поют» очень чисто.

Когда-то Иоганн Кеплер видел в мироздании гармонию мира и говорил о планетах Солнечной системы как об оркестре, играющем (правда, неслышно для человека) мировую симфонию. Можно сказать, что сейчас фантазия Кеплера «реализовалась» в пульсарах — пять из них непрерывно звучат неожиданным аккордом (правда, слишком слабым для нашего уха).

Я. С.

*) См. статьи «Самый быстрый пульсар» («Квант», 1983, № 12) и «Миллисекундные пульсары» («Квант», 1985, № 2).


Мы имеем трoякого рода величины:
рациональные,
алгебраические,
трансцендентные.
Г. Лейбниц

ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

Кандидат физико-математических наук А. С. ЯРСКИЙ

«Алгебраическое число», «алгебраическая функция», «алгебраическое уравнение», «алгебраическая кривая»... Среди почти необозримого множества ответвлений современной математики не существует, пожалуй, такого, где не подвергалась бы отдельному изучению алгебраическая сторона рассматриваемого математического объекта. Нередко говорят даже о своего рода «алгебраической экспансии» в математике.

Множество чисел и множество функций наделены единой алгебраической классификацией: «рациональные», «алгебраические», «трансцендентные». Для чисел эта классификация начала складываться еще в XVII веке (хотя лишь в 1844 году появилось первое принадлежащее Ж. Лиувиллю доказательство трансцендентности определенного множества чисел) и постепенно переносилась на все более широкое множество математических объектов.

Общность указанной классификации дает возможность, в частности, с единой точки зрения взглянуть на некоторые свойства функций и чисел, яснее увидеть их сходство и тем самым глубже осознать их отличие.

§ 1. Целые числа и функции

Рассмотрим два множества — множество Z целых чисел и множество $R[x]$ многочленов от одной переменной x с коэффициентами в множестве R действительных чисел. На первый взгляд, эти два множества отличаются решительно всем: элементы Z — числа, а элементы $R[x]$ — функции, все элементы Z можно расположить в виде последовательности $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, а с элементами $R[x]$ такую операцию проделать не удается — их «слишком много» для этого... Итак, увидеть разницу между Z и $R[x]$ легко. Труднее обнаружить те свойства, которые делают эти два множества похожими, открыть ту аналогию, которая даст основание «называть разные вещи одинаковыми именами» (чем, по словам А. Пуанкаре, и занимается математика).

1. Сумма, разность, произведение целых чисел (многочленов) есть целое число (многочлен).

2. Любое целое число (многочлен) можно разделить с остатком на ненулевое целое число (ненулевой многочлен).

Рассмотрим второе свойство — делимость. Алгоритм деления многочленов с остатком — деления «уголком» — очень похож на деление «уголком» целых чисел. Например:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3+2x^2-x-1 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
-\;-x^2-x-1 & \\
-x^2-3x & \\ \cline{1-1}
-\;2x-1 & \\
2x+6 & \\ \cline{1-1}
-7 &
\end{array}$$

Отсюда

$$x^3+2x^2-x-1=(x^2-x+2)(x+3)-7.$$

В общем случае, если $P, Q \in R[x]$ и Q — ненулевой многочлен, найдутся такие $P_1, R \in R[x]$, что

$$P=P_1Q+R,$$

причем степень остатка R строго меньше степени делителя Q. Частное P_1 и остаток R однозначно определяются выбором делимого P и делителя Q.

Напомним несколько определений. *Наибольшим общим делителем* (НОД) многочленов P и Q называется многочлен D, делящий P и Q и делящийся на любой другой их общий делитель.*) Обозначим НОД P и Q символом (P, Q).

*) На самом деле мы определили НОД лишь с точностью до постоянного множителя.

Многочлены P и Q называются *взаимно простыми*, если они не имеют отличных от константы общих делителей. НОД взаимно простых многочленов считается равным единице: $(P, Q)=1$.

Многочлен P степени n называется *неприводимым*, если он не имеет делителей положительной степени $k<n$. В частности, любой многочлен степени $n=1$ неприводим.

Установим вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $D=(P, Q)$. Существуют $A, B \in R[x]$ такие, что

$$D=AP+BQ.$$

Доказательство. Рассмотрим множество H, состоящее из всевозможных многочленов вида $AP+BQ$, где $A, B \in R[x]$. Выберем в H ненулевой многочлен D наименьшей степени. Тогда, по определению H,

$$D=AP+BQ \qquad (1)$$

при некоторых $A, B \in R[x]$. Разделим P на D с остатком:

$$P=P_1D+R,$$

где R — многочлен, степень которого строго меньше степени D. Тогда $R=P-P_1D=P-P_1(AP+BQ)=$ $=(1-P_1A)P+(-P_1B)Q=A_1P+B_1Q \in H$. Среди ненулевых многочленов из H степень D минимальна. Но $R \in H$ и степень R меньше степени D. Следовательно, $R=0$ и $P \vdots D$. Аналогично доказывается, что $Q \vdots D$. Таким образом, D — общий делитель P и Q. Пусть D_1 — любой другой общий делитель P и Q. Тогда $AP \vdots D_1$ и $BQ \vdots D_1$. Отсюда $(AP+BQ) \vdots D_1$. Из (1) следует теперь, что $D \vdots D_1$. Тем самым D — НОД многочленов P и Q. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $PQ \vdots R$ и $(P, R)=1$. Тогда $Q \vdots R$ $(P, Q, R \in R[x])$.

Доказательство. Поскольку $(P, R)=1$, то, по лемме 1, существуют $A, B \in R[x]$ такие, что $AP+BR=1$. Умножим это равенство на Q: $A(PQ)+(BQ)R=Q$. По условию $PQ \vdots R$. Следовательно, $(APQ+BQR) \vdots R$, откуда $Q \vdots R$.

Теорема 2. Пусть $P_1P_2...P_k \vdots R$, где R — неприводимый многочлен. Тогда хотя бы один из сомножителей $P_i \vdots R$. В частности, если $P^n \vdots R$, то $P \vdots R$.

Доказательство легко получается по индукции, базу которой (при $k=2$) и индуктивный шаг обеспечивает теорема 1.

Следствие 1. $(P^n, Q^k)=1$ тогда и только тогда, когда $(P, Q)=1$ (n и k — целые положительные числа).

Следствие 2. Любой многочлен разлагается на неприводимые множители, причем — с точностью до порядка и постоянных множителей — единственным способом.

Для целых чисел все доказанные факты останутся в силе — хочется в особенности это подчеркнуть!

Упражнение 1. а) Сформулируйте и докажите аналоги леммы 1 и теорем 1 и 2 для целых чисел.

б) Докажите «основную теорему арифметики»: любое целое число обладает единственным с точностью до порядка разложением на простые множители.

В процессе работы над упражнением 1 нельзя не заметить, что рассматриваемые утверждения о целых числах получаются из аналогичных утверждений о многочленах почти автоматически — заменой слова «многочлен» словами «целое число». Таким образом, не только факты, но и доказательства этих фактов подчеркивают сходство свойств Z и $R[x]$. Как следствие, возникает мысль: ввести в рассмотрение объект, обладающий по определению теми и только теми свойствами, которые использовались в проведенных рассуждениях. Для такого объекта все доказанные утверждения, естественно, останутся в силе. А изученные ранее множества целых чисел Z и многочленов $R[x]$ превратятся в частные случаи, конкретные примеры рассматриваемого общего объекта.

С этой — вполне современной — точки зрения, все рассказанное можно описать одним предложением: множества Z и $R[x]$ являются частными случаями одной алгебраической структуры — евклидова кольца.

§ 2. Рациональные числа и функции

Определение 1. Число y называется *рациональным*, если оно представимо в виде отношения целых чисел:

$$y=p/q, \quad p, q\in Z, \quad q\neq 0.$$

Как видно из определения, каждое рациональное число определяется парой целых чисел p и q.

Определение 2. Рациональные числа p/q и p_1/q_1 называются *равными*, если $pq_1=qp_1$, $(p, p_1, q, q_1\in Z$, $q\neq 0$, $q_1\neq 0)$.

Таким образом, разные пары p/q и p_1/q_1 могут определять одно и то же рациональное число.

Из определения 2 непосредственно вытекает, в частности, известное правило сокращения дробей:

$$\frac{pr}{qr}=\frac{p}{q}, \quad qr\neq 0.$$

Для рациональных функций определения вполне аналогичны определениям 1 и 2.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется *рациональной*, если она представима в виде отношения многочленов:

$$y=P/Q, \quad P, Q\in R[x].$$

Множество всех рациональных функций обозначается символом $R(x)$.

Упражнение 2. Пусть $f, g\in R(x)$. Докажите, что $f\pm g, f\cdot g, f(g(x))\in R(x)$.

Определение 4. Рациональные функции P/Q и P_1/Q_1 называются *равными*, если $PQ_1=QP_1 (P, P_1, Q, Q_1\in R[x])$.

Приведенные определения для рациональных чисел и рациональных функций в такой степени аналогичны, что возникает желание использовать эту аналогию для создания единого, пригодного в обоих случаях определения. В современной алгебре обобщением перехода от целых чисел (многочленов) к рациональным числам (рациональным функциям) является понятие перехода от произвольного евклидова кольца к его «полю частных».

По сравнению с множеством целых чисел, множество рациональных чисел довольно обширно и для многих нужд рациональных чисел вполне достаточно. Однако еще древние греки обнаружили, что множество рациональных чисел не исчерпывает множества всех необходимых чисел. Например, диагональ единичного квадрата, равная $\sqrt{2}$, не является рациональным числом. Итак, помимо рациональных чисел существует множество чисел, не являющихся рациональными — иррациональных чисел. Естественно ввести аналогичное определение и для функций.

Определение 5. Функцию y будем называть *иррациональной*, если она не является рациональной: $y\notin R(x)$.

Упражнение 3. а) Пусть $f\in R(x)$, $g\notin R(x)$. Докажите, что $f\pm g\notin R(x)$, а при $f\neq 0$ $fg\notin R(x)$ и $f/g\notin R(x)$.

б) Докажите иррациональность функции, график которой изображен на рисунке 1.

Довольно часто понятие «иррациональность» связывают с наличием в записи функции радикалов. Как будет ясно из дальнейшего, такое представление справедливо лишь отчасти.

Теорема 3. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при целом $n\geqslant 2$ иррациональна.

Доказательство. Рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению

$$y^n-x=0. \qquad (2)$$

Достаточно доказать, что это уравнение не имеет рациональных решений $y\in R(x)$. Пусть, от противного, $y=P/Q$, $P, Q\in R[x]$ — решение уравнения (2). Тогда

$$P^n=xQ^n, \; P\neq 0, \; Q\neq 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) не нарушится, если обе его части сократить на любой общий делитель P и Q. Следова-

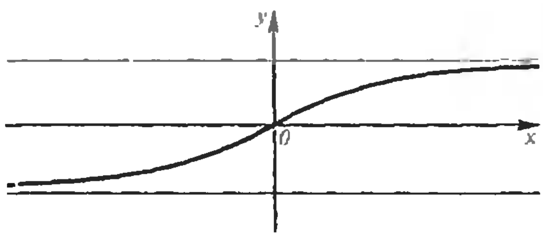


Рис. 1.

тельно, можно считать P и Q взаимно простыми: $(P, Q)=1$.

Правая, а значит, и левая часть равенства (3) делится на x: $P^n \vdots x$. И поскольку x — неприводимый многочлен, получаем, что и $P \vdots x$ (Теорема 2), т. е.

$$P=xP_1, \quad P_1\in R[x].$$

Подставив полученное в (3) и сократив на x, получим

$$x^{n-1}P_1^n=Q^n.$$

По условию $n-1\geqslant 1$. Поэтому левая часть последнего равенства делится на x. Отсюда $Q^n \vdots x$ и, в силу неприводимости x, $Q \vdots x$. Итак, $P \vdots x$ и $Q \vdots x$ — вопреки условию $(P, Q)=1$. Теорема доказана.

Упражнение 4. Докажите иррациональность числа $y=\sqrt[n]{2}$ при целом $n\geqslant 2$ (и сравните проведенное доказательство с доказательством теоремы 3).

Избранный нами способ доказательства теоремы 3 удается применить и в более общей ситуации. Уравнение (2), которому удовлетворяет функция $y=\sqrt[n]{x}$, является частным случаем алгебраического уравнения

$$p_0y^n+p_1y^{n-1}+\ldots+p_{n-1}y+p_n=0, \quad p_0\neq 0, \tag{4}$$

где все $p_0, p_1, \ldots, p_n\in R[x]$. Существует универсальный способ отыскания всех рациональных решений таких уравнений.

Лемма 2. Пусть $y=P/Q$, $P, Q\in R[x]$ — рациональное решение уравнения (4), причем дробь P/Q несократима: $(P, Q)=1$. Тогда $p_n \vdots P$ и $p_0 \vdots Q$.

Иными словами, числитель и знаменатель искомого решения нужно выбирать только среди делителей, соответственно, свободного члена p_n уравнения и его коэффициента p_0 при старшей степени.

Доказательство. Подставив $y=P/Q$ в (4) и домножив на Q^n, получим

$$p_0P^n+p_1P^{n-1}Q+\ldots+p_{n-1}PQ^{n-1}+ +p_nQ^n=0.$$

Все слагаемые, кроме последнего, содержат множитель p. Следовательно, $p_nQ^n \vdots P$, так как $(P, Q)=1$, то и $(P, Q^n)=1$ (Следствие 1). Следовательно, $p_n \vdots P$ (Теорема 1). Аналогично доказывается, что $p_0 \vdots Q$. Лемма доказана.

Пример. Опираясь на лемму 2, можно установить иррациональность всех решений уравнения

$$x^2y^3+(2x-1)y-1=0.$$

Положив $y=P/Q$, $P, Q\in R[x]$, $(P, Q)=1$, получим условие: $1 \vdots P$ и $x^2 \vdots Q$. Следовательно, возможны только три варианта:

$$y=C, \; y=C/x, \; y=C/x^2, \; C\in R.$$

Поочередно подставляя эти выражения в уравнение, легко убедиться, что ни одно из них не является решением уравнения, чем и завершается доказательство иррациональности всех его решений.

Упражнение 5. а) Найдите решения $y\in R(x)$ уравнений

$$y^3+y^2+(3x-2)y+x^3-x^2=0;$$
$$xy^3-(x+8)y^2+(x+2)y-2=0;$$

и разложите левые части уравнений на множители.

б) Докажите иррациональность решений уравнений

$$xy^3-2xy^2+y-1=0; \quad y^2+x^2-1=0.$$

в) Пусть $P\in R[x]$ — неприводимый многочлен положительной степени. Тогда $y=\sqrt[n]{P}$ при целом $n\geqslant 2$ — иррациональная функция.

г) Докажите иррациональность функций $y=\sqrt{1-x^3}$, $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

Ситуация, аналогичная описанной в условии леммы 2, возникает и для чисел, что отражает следующее

Упражнение 6. а) Пусть несократимая дробь $y=p/q$, $p, q\in Z$ является корнем уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in Z$. Тогда $p_n \vdots p$ и $p_0 \vdots q$.

б) Докажите иррациональность корней уравнения

$$2y^3+3y^2-y-1=0.$$

в) Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

Упражнение 7. Докажите:

а) Функция $y=\sqrt[n]{1+x^n}$ иррациональна.

б) Функции, графики которых изображены на рисунках 2—4, иррациональны.

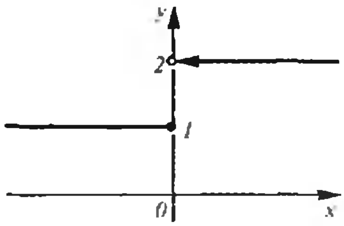


Рис. 2.

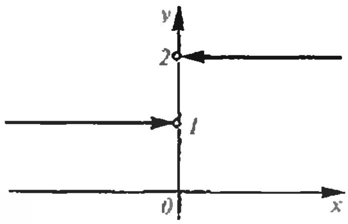


Рис. 3.

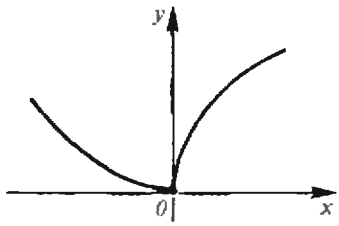


Рис. 4.

в) Отличная от константы периодическая функция иррациональна.

Уже не один раз мы наблюдали аналогию мира чисел и мира функций. В такой ситуации можно подсознательно подменить одно-единственное слово: вместо «аналогично» сказать «следовательно»! Точнее, может возникнуть мысль, не следует ли из иррациональности $\sqrt[n]{x}$ иррациональность $\sqrt[n]{2}$, то есть значения этой функции при $x=2$?

Ответ на этот вопрос отрицателен! Рассмотрим, к примеру, знаменитое равенство

$$a^n+b^n=c^n,\ n\geqslant 3,\ a, b, c\neq 0. \qquad (5)$$

Разделив обе части на a^n и положив $x=b/a$, $y=c/a$, приведем это равенство к виду $1+x^n=y^n$ или

$$y=\sqrt[n]{1+x^n}.$$

Если бы из иррациональности этой функции (см. упражнение 7а) следовала иррациональность ее значений, мы получили бы, что при $x\in Q$ значение функции y — число иррациональное, и тем самым исходное равенство (5) при целых a, b, c невозможно!..

Кроме того, при $n=2$ функция $y=\sqrt[n]{1+x^n}$ остается иррациональной, но принимает рациональные значения при любом $x=2pq/(p^2-q^2)$, $p, q\in \boldsymbol{Z}$, $p\neq \pm q$ (проверьте это самостоятельно).

Упражнение 8. Пусть $a=a(x)$, $b=b(x)$ и $c=c(x)$ — попарно взаимно простые многочлены положительных степеней. Докажите, что при таких a, b и c равенство (5) невозможно.

§ 3. Трансцендентность

Определение 6. Число $y\in \boldsymbol{R}$ называется ***алгебраическим***, если оно является корнем алгебраического уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in \boldsymbol{Z}$.

Всякое рациональное число $y=p/q$, $q\neq 0$ удовлетворяет уравнению вида (4)

$$qy-p=0.$$

Тем самым любое рациональное число является алгебраическим. Но множество алгебраических чисел шире множества рациональных. Например, число $y=\sqrt[n]{2}$, $n\geqslant 2$ не является рациональным (упражнение 4), но при этом удовлетворяет уравнению $y^n-2=0$ и тем самым является числом алгебраическим.

Упражнение 9. Докажите:

а) Если $y\neq 0$ — алгебраическое число, то и $1/y$ — алгебраическое число.

б) Если y — алгебраическое, а r — рациональное число, то $y+r$ и yr — алгебраические числа.

Определение 7. Число y называется *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим.

Как и выше, сделаем попытку распространить определение алгебраичности (или трансцендентности) с чисел на функции. Представляется вполне естественным назвать алгебраической функцию $y=y(x)$, удовлетворяющую алгебраическому уравнению (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in \boldsymbol{R}[x]$, то есть в очередной раз заменить в уже имеющейся конструкции целые числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$ многочленами. Действительно, именно такое определение алгебраической функции было изначально общепринятым (да и в современных изданиях упомянутое определение — не редкость). Но в результате развития теории алгебраических функций такими замечательными математиками, как Н. Х. Абель, Б. Риман, К. Вейерштрасс, стало ясно, что из всех удовлетворяющих алгебраическим уравнениям функций следует оставить в рассмотрении лишь более узкий класс — так называемые «аналитические» функции. Тем самым требование аналитичности функции вошло неотъемлемой составной частью в понятие алгебраической функции.

Следует отметить, что почти все изучаемые в школе функции являются на самом деле аналитическими и для таких «школьных» функций первоначальный вариант определения алгебраической функции вполне достаточен. Например, функция $y=\sqrt[3]{x}$ является алгебраической с точки зрения любого из упоминавшихся двух определений.

Чтобы избежать неясности, мы будем говорить лишь о «функциях, удовлетворяющих алгебраическим уравнениям», избегая термина «алгебраическая функция».

Упражнение 10. Пусть функция f — решение алгебраического уравнения, а $g\in R(x)$. Докажите, что $f+g$, fg и $f(g(x))$ являются решениями алгебраических уравнений.

Что же касается функций, не являющихся решениями алгебраических уравнений, то к ним обычно дополнительных требований типа «аналитичности» не предъявляется, что дает нам право (сохранив аналогию с определением трансцендентного числа) ввести заключительное

Определение 8. Функцию $y=f(x)$ будем называть *трансцендентной*, если она не является решением никакого алгебраического уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in R[x]$.

Трансцендентная функция является, в силу сказанного выше, иррациональной. Тем самым, доказав трансцендентность некоторой функции, мы одновременно установим ее иррациональность.

До сих пор наши утверждения о функциях находили аналоги для чисел. Это наводит на мысль, что и доказательства трансцендентности функций и чисел должны быть в значительной мере аналогичными. Увы, формальное сходство определений в данном случае не влечет за собой аналогии свойств. Например, найденное в 1873 г. Ш. Эрмитом и требующее тонких рассуждений доказательство трансцендентности числа e ничем не напоминает относительно простое доказательство трансцендентности функции e^x.

Теорема 4. Функция $y=e^x$ трансцендентна.

Доказательство. Пусть, от противного, функция $y=e^x$ удовлетворяет алгебраическому уравнению. Рассмотрим уравнение (4) наименьшей степени $n\geqslant 1$, решением которого является y:

$$p_0e^{nx}+p_1e^{(n-1)x}+\ldots+p_{n-1}e^x+p_n=0,\quad p_0\neq 0, \qquad (6)$$

$p_0, p_1, \ldots, p_n\in R[x]$. Если $p_n=0$, то равенство (6) можно сократить на e^x, получив для y — вопреки минимальности n — уравнение меньшей степени. Следовательно, p_n — ненулевой многочлен. Разделив (6) на p_n, получим

$$r_0e^{nx}+r_1e^{(n-1)x}+\ldots+r_{n-1}e^x+1=0,\quad r_0\neq 0, \qquad (7)$$

где $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ — рациональные функции. Продифференцируем равенство (7):

$$(r_0'+nr_0)e^{nx}+(r_1'+(n-1)r_1)e^{(n-1)x}+\ldots+(r_{n-1}'+r_{n-1})e^x=0.$$

Сократив полученное соотношение на e^x, получим уравнение степени $n-1$, корнем которого по-прежнему является $y=e^x$. В силу минимальности n, все коэффициенты этого уравнения обязаны быть нулевыми. В частности,

$$r_0'+nr_0=0,\quad r_0\neq 0. \qquad (8)$$

Докажем, что при $r_0\in R(x)$ равенство (8) невозможно. Пусть

$$r_0=P/Q,\quad P, Q\in R[x],\quad (P, Q)=1.$$

Подставив последнее выражение в (8) и домножив на Q^2, получим

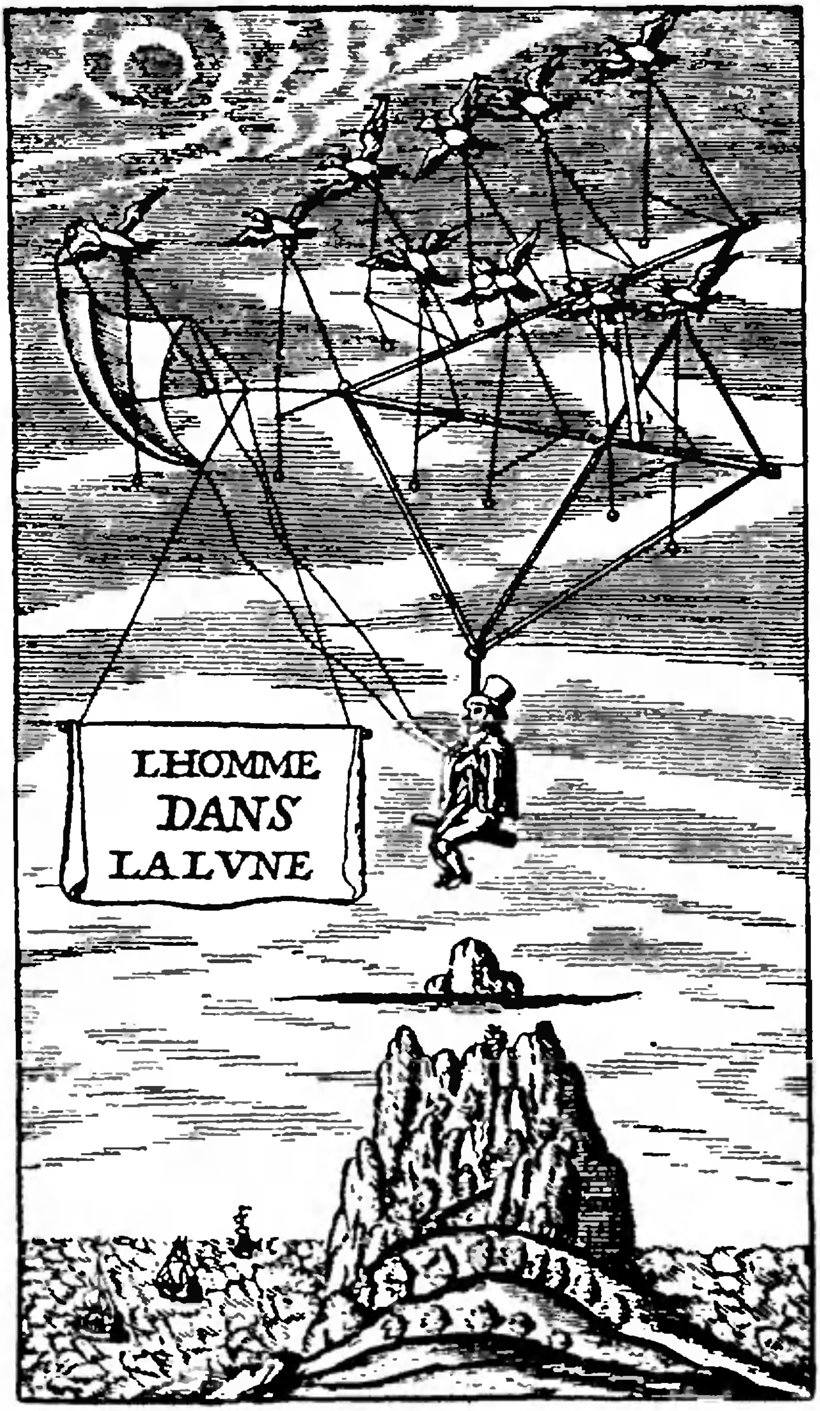
$$P'Q-PQ'+nPQ=0. \qquad (9)$$

Многочлены $P'Q$ и nPQ делятся на Q.

(Окончание см. на с. 24)

ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

С. В. ГРЫЗЛОВ



Средневековые ученые, наблюдавшие за движением комет, пытались понять, почему в зависимости от положения комет относительно Солнца формы их хвостов изменяются. В 1604 году Иоганн Кеплер предположил, что форма хвостов комет определяется действием светового давления. С тех пор многие исследователи пытались измерить это давление (среди них был и один из создателей волновой теории света О. Френель). Но все эксперименты были безрезультатны. И почти 300 лет световое давление оставалось лишь гипотезой.

Эта гравюра — фронтиспис французского издания 1648 года книги Ф. Годвина «Человек на Луне». Может быть, художник считал, что в небе Луны подобный летательный аппарат будет двигаться за счет давления солнечного света?

В 1865 году Дж. К. Максвелл создал электромагнитную теорию света. Согласно этой теории световые волны имеют электромагнитную природу, т. е. световые явления можно рассматривать как частный случай электромагнитных явлений. Из основных уравнений теории Максвелла как абсолютно точный факт следовало существование светового давления. Максвелл вычислил это давление. По расчетам получалось, что в солнечный полдень на поверхности, полностью отражающей световые лучи, создается давление, равное всего $4{,}7 \times 10^{-6}$ Н/м^2.

Долгое время ученые спорили о правильности уравнений Максвелла. Вновь предпринимались попытки обнаружить эффект светового давления. И вновь — безуспешно.

Трудность в измерениях давления света заключалась не только и не столько в том, что сила давления света очень мала. Главные осложнения происходили из-за того, что экспериментаторам мешал... сам свет. Причем создаваемые им помехи по «эффективности» во много раз превосходили давление света.

В 1899 году замечательный русский физик Петр Николаевич Лебедев впервые измерил давление света. Ему удалось блестяще справиться с трудностями, которые мешали другим исследователям.

Основной частью прибора Лебедева были плоские легчайшие крылышки из различных (в основном) металлических материалов. Поверхность одних крылышек была зачерненной, а других — зеркальной. От зеркальной поверхности свет практически полностью отражался, а зачерненная поверхность поглощала свет. В результате сила давления света на зеркальные крылышки оказывалась почти вдвое больше, чем сила давления на зачерненные. За счет этого возникал вращающий момент сил, система крылышек начинала поворачиваться, закручивая нить. По углу закручивания нити оценивалось давление света.

Какие же помехи возникали при измерениях?

Первая заключалась в том, что свет, падая на крылышки, нагревал и окружающий воздух. Возникающие конвекционные потоки воздуха, подобно ветру, приводили в движение крылышки. И когда ученый проводил измерения, неизвестно было, от чего перемещались крылышки — то ли от светового давления, то ли от потоков воздуха.

Это была не единственная помеха. Под действием света возникает еще один эффект, который получил название радиометрического. Суть его в том, что разные стороны крылышка нагревались по-разному (ведь свет падает только с одной стороны) и отдавали разное количество энергии соприкасающимся с ними молекулам воздуха. Ту сторону, где эта энергия больше (более теплая сторона), молекулы покидали с большей скоростью, т. е. с бо́льшим импульсом. А по закону сохранения импульса, улетая, они с большей силой отталкивают крылышко, чем молекулы противоположной «холодной» стороны. Оказалось, что радиометрические силы действуют в том же направлении, что и давление света, а величина их, как уже говорилось, на несколько порядков превосходит величину светового давления.

Чтобы свести эти «вредные» силы к минимуму, прежде всего потребовалось создать вакуум. Чем меньше молекул остается в сосуде, тем слабее помехи.

Неспроста Лебедев выбрал в качестве материала крылышек тонкие металлические пленки. Во-первых, такие пленки прекрасно проводили тепло, и перепад температур на разных сторонах крылышек становился меньше — уменьшался и радиометрический эффект. Кроме того, их маленькая масса определяла небольшой момент инерции всей подвижной системы, что в условиях вакуума также позволяло увеличить точность эксперимента.

Много еще различных устройств и приспособлений придумал П. Н. Лебедев. Перебрал много вариантов условий опыта и испытал различные схемы измерений, пока его труд не привел наконец к успеху.

В результате своих экспериментов он измерил давление света; полученное им значение с точностью 20 % совпадало со значением, предсказанным теорией Максвелла. Лебедев показал, что световой поток обладает не только энергией, но и импульсом.

Долгое время использовать световое давление не представлялось возможным из-за его небольшой мощности. Только появление лазеров — устройств, способных концентрировать световую энергию в очень узкий и мощный пучок,— позволило применить открытие Лебедева.

Например, можно удерживать маленькие частицы в воздухе, уравновешивая силу тяжести силой светового давления, и перемещать их. Под действием силы светового давления частицы, имеющие разные массы, разгоняются по-разному. Следовательно, можно с помощью специальных ловушек сортировать очень маленькие частицы.

Световое давление можно использовать для разделения смеси двух газов. Такое разделение может быть реализовано в случае, если частота лазерного излучения (которым облучают смесь) совпадает с частотой перехода атомов одного из газов из невозбужденного состояния в возбужденное. Поглощая фотон, атом такого газа получает импульс по направлению лазерного пучка. При обратном переходе атома из возбужденного состояния в невозбужденное вектор импульса испускаемого фотона имеет произвольное направление. При последующих поглощениях и испусканиях импульсы «испускания» взаимно гасятся, а импульсы «поглощения» суммируются, и в конечном итоге резонансный атом получает общий импульс, направленный вдоль луча лазера. Таким образом, луч лазера, проходя последовательно через две камеры, в первой из которых находится смесь газов, увлекает за собой во вторую камеру атомы одного из них.

Световое давление можно использовать и для ускорения частиц в вакууме (в воздухе слишком велико сопротивление). Этим можно воспользоваться, например, для моделирования взаимодействия обшивки космического корабля с микрометеоритами.

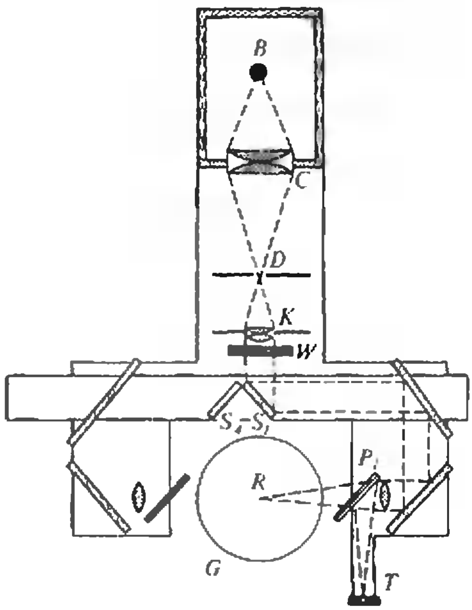


Схема опытов П. Н. Лебедева по измерению давления света. Подвес R с легкими крылышками, помещенный на тонкой нити в откачанном сосуде G, представляет собой весьма чувствительные крутильные весы. Свет от дуговой лампы B концентрируется при помощи системы линз и зеркал на одном из крылышек и вызывает закручивание подвеса, которое наблюдается при помощи трубы и зеркальца, прикрепленного к нити (не показаны на рисунке). Передвигая двойное зеркало S_1S_4, можно направлять свет от дуги на переднюю или на заднюю поверхность крылышка и таким образом менять направление закручивания. Пластинка P_1 позволяет направлять определенную часть светового пучка на термоэлемент T, который служит для измерения величины падающей энергии. В опытах использовались подвесы с различными системами крепления крылышек.

Изучается возможность использовать давление солнечного излучения для ориентации и ускорения космических аппаратов в пространстве.

Явление, экспериментально исследованное П. Н. Лебедевым, все шире проникает в различные области науки и техники.

ЧТО ТАКОЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Доктор физико-математических наук
В. А. ЕФРЕМОВИЧ

Это основное понятие математики. Оно принадлежит так называемой качественной геометрии, т. е. той части геометрии, которая вовсе не интересуется понятиями измерительного характера (расстояниями, длинами, объемами, ...). Несмотря на это (а быть может, благодаря этому?), на нем стоит все здание математического анализа и почти вся геометрия.

Этим понятием владели (на интуитивном уровне) математики древности, но точное определение ему было дано лишь в первой половине XIX века знаменитым французским математиком О. Коши (1787—1857). Чтобы пояснить это определение, нам потребуется

Общее понятие функции

Понятие функции претерпело ряд важных обобщений. Сначала рассматривали только числовые функции числового аргумента, например x^3, $\operatorname{tg} x$, e^x, и притом заданные тем или иным аналитическим выражением. Позднее выяснилось, что последнее не существенно. Важно лишь, что каждому значению аргумента x соответствует свое числовое значение функции. Непрерывная функция при этом изображается непрерывной кривой, получаемой движением карандаша без отрыва от бумаги (на рисунке 1 — непрерывная функция, на рисунке 2 — разрывная).

Далее можно рассматривать числовые функции точечного аргумента, например температуру или атмосферное давление в различных точках пространства. Еще пример. Плоский участок земли покрыт снегом; тогда высота h снежного покрова в каждой точке p есть значение некоторой функции: $h=f(p)$. Если на участке установить координаты x, y, каждая точка получит свое «имя»: $p=(x, y)$, и рассматриваемая функция f может быть записана так: $f(p)=f(x, y)$. Это — функция одной переменной точки p, или функция двух числовых переменных x, y. Графиком этой функции служит поверхность снежного покрова.

Наконец, можно рассматривать (самый общий случай) точечную функцию точечного аргумента, т. е. *отображение* $f\colon X \to Y$ фигуры X в фигуру Y. Таково изображение на плоском чертеже пространственной фигуры, например ортогональная проекция тела на плоскость. Любую картину художника или фотографию можно рассматривать как функцию (т. е. отображение), где каждой точке x изображаемого соответствует точка x' изображения. В этом случае $x'=f(x)$ называется *образом* точки x. Такими функциями-отображениями занимались прежде всего художники. Особо ценен вклад великого Леонардо да Винчи (1452—1519), одного из первых художников, освоивших математическую теорию перспективы.

Непрерывность

Самое общее понятие функции-отображения позволяет вполне наглядно и вместе с тем строго математически

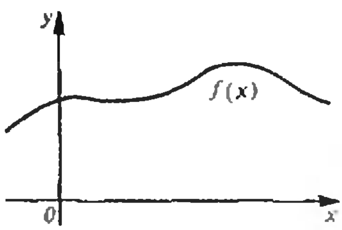


Рис. 1.

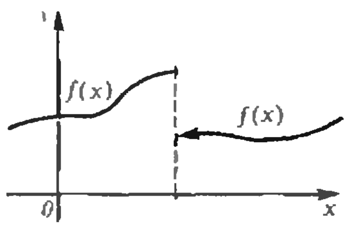


Рис. 2.

объяснить понятие непрерывности. Для этого сначала рассмотрим пример, где происходит разрыв, т. е. нарушение непрерывности.

Пусть X — резинка для упаковки лекарств, грубая модель окружности. Предположим, что в процессе деформации она вдруг разрывается в некоторой точке a. Что это значит? Некоторая ее часть B, примыкавшая раньше к a, т. е. находившаяся от a на нулевом расстоянии (пишем $B\delta a$), после разрыва (теперь мы ее обозначим B') оказывается неблизкой к a' (новому положению точки a — см. рисунок 3). Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B, близкая к a ($B\delta a$), становится неблизкой к новому положению a' точки a: $B\delta a$, но $B'\not\delta a'$. Теперь понятно следующее определение:

Отображение $f\colon X\to Y$ называется *непрерывным в точке* $a\in X$, если всякая часть $B\subset X$, близкая к a, после отображения переходит в положение B', близкое к $a'=f(a)$, т. е.

$$B\delta a\Rightarrow B'\delta a'.$$

Обозначение $B\delta a$ имеет точный смысл: для всякого сколь угодно малого положительного ε в фигуре B есть точка x такая, что $xa<\varepsilon$ (здесь xa — расстояние от x до a; всюду дальше через pq мы обозначаем расстояние от p до q). Аналогично $A\delta B$ означает, что в фигурах A, B есть точки $x\in A$, $y\in B$ такие, что $xy<\varepsilon$ при любом положительном ε. Заметим, что две различные точки не могут быть в этом смысле близкими: если $a\neq b$, то $a\not\delta b$ (даже если $ab=10^{-100}$).*)

Это определение равносильно классическому определению Коши:

Отображение $f\colon X\to Y$ *непрерывно в точке* $a\in X$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\alpha>0$, что из $xa<\alpha$ следует $x'a'<\varepsilon$ (здесь $a'=f(a)$, $x'=f(x)$).

Равносильность двух определений доказана в конце нашей заметки.

*) Определение близости, данное здесь, было впервые высказано автором этой статьи в 1936 году. Понятие близости можно задать аксиоматически, не пользуясь расстоянием, и на его основе построить всю топологию. (*Примеч. ред.*)

Если функция непрерывна в каждой точке $x\in X$, то говорят, что она *непрерывна на всем* множестве X. Это определение, вместе с определением Коши, не так легко освоить. Сам знаменитый Коши не раз ошибался, нечаянно подменяя требование непрерывности более сильным — тем, что теперь называют *равномерной непрерывностью*. Это весьма важный частный случай непрерывности, и мы на нем остановимся.

Равномерная непрерывность

Отображение $f\colon X\to Y$ называется *равномерно непрерывным на* X, если любые две близкие части $A, B\subset X$ переходят при f в близкие части $A', B'\subset Y$, т. е. $A\delta B\Rightarrow A'\delta B'$.

Упражнение. Докажите, что отображение

$$\operatorname{tg}\colon \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\to R$$

не равномерно непрерывно на $(-\pi/2;\ \pi/2)$. (Здесь найти нужные A, B такие, что $A\delta B$, но $A'\not\delta B'$, труднее: это две последовательности точек, например прообразы множеств $A'=\{1, 3, \ldots\}$, $B'=\{2, 4, \ldots\}$, $A'\not\delta B'$.)

Имеется принципиальное различие между понятиями непрерывности и равномерной непрерывности. Первое основано на близости между точкой и множеством, второе на близости между двумя множествами. Близость между точкой и множеством относится к *топологии*, а близость между множествами — к *геометрии близости*, более «тонкой» науке, чем топология. Чтобы понять это различие, приведем лишь один пример. С точки зрения топологии ветвь гиперболы и ее асимптоту нельзя отличить от пары параллельных прямых (любая точка гиперболы не близка к ее асимп-

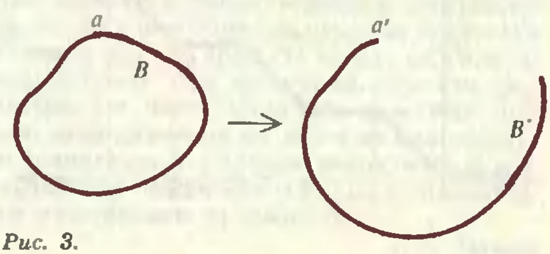


Рис. 3.

тоте!), в то время как эти две пары объектов не одинаковы в геометрии близости (асимптота близка к гиперболе!).

Доказательство равносильности определений непрерывности

Пусть отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке a по Коши, где X, Y — фигуры, для которых определено расстояние между точками, обладающее обычными свойствами. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется свое положительное число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что из $ax < \alpha$ следует $a'x' < \varepsilon$. Пусть часть $B \subset X$ близка к a; значит для всякого $\alpha > 0$ в B найдется точка x такая, что $ax < \alpha$. Если $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, то $a'x' < \varepsilon$, и так как ε произвольно мало́, то $B' = f(B)$ близко к $a' = f(a)$ $(B\delta a \Rightarrow b'\delta a')$.

Пусть, наоборот, известно, что f удовлетворяет первому определению непрерывности. Докажем, что f непрерывно по Коши. Рассуждая от противного, предположим, что не для всякого $\varepsilon > 0$ найдется нужное $\alpha > 0$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что любое положительное α будет непригодно. Испытаем различные α: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, ...; любое из них непригодно — это значит, что для α_n есть такая точка — назовем ее x_n, — что $ax_n < 1/n$, но $a'x'_n \geqslant \varepsilon_0$; тогда, обозначив множество всех x_n через B $(B = \{x_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\})$, получим $B\delta a$, а $B'\not\delta a'$ $(B' = \{x'_n\})$. Противоречие.

Таким образом, два подхода к понятию непрерывности — классический подход Коши, связанный с подбором числа δ по произвольному числу ε, и более наглядный, на наш взгляд, подход, связанный с понятием близости, оказываются равносильными.

Числа и функции

(Начало см. на с. 12)

Поэтому из равенства (9) следует, что и $PQ' \vdots Q$. Но поскольку $(P, Q) = 1$, то $Q' \vdots Q$. Следовательно, степень Q не выше степени Q'. Последнее возможно только если Q — константа. Точно так же из (9) следует, что P — константа. Но тогда и $r_0 = P/Q$ — константа. При постоянном r_0 равенство (8) примет вид $nr_0 = 0$, $r_0 \neq 0$. И так как $n \geqslant 1$, это равенство противоречиво. Теорема доказана.

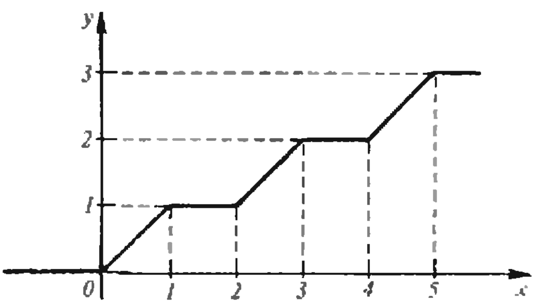


Рис. 5.

Упражнение 11. а) Докажите трансцендентность функций

$$y = \sin x;\quad y = \sqrt{e^x + 1}.$$

б) Приведите примеры трансцендентных функций f и g таких, что $f+g$, fg, $f(g(x))$ не являются трансцендентными.

в) Докажите, что если f и g — трансцендентные функции, то по крайней мере одна из функций $f+g$ и fg также трансцендентна.

В конце § 2 мы попытались найти какую-либо связь иррациональности функции с иррациональностью ее значений — и потерпели полную неудачу. После этого, вероятно, уже никому не придет в голову искать связь трансцендентности функции с трансцендентностью ее значений. Чтобы окончательно снять все сомнения, достаточно рассмотреть функцию, график которой изображен на рисунке 5. Эта функция трансцендентна, однако принимает при всех рациональных значениях x не только алгебраические, но даже рациональные значения (докажите самостоятельно перечисленные свойства этой функции).

Задачник „Кванта"

Задачи

М1106 — М1110, Ф1118 — Ф1122

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1106» или «Ф1118». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1106. Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

В. В. Произволов

М1107. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3.$$

Л. Д. Курляндчик

М1108. В выпуклом n-угольнике ($n>4$) никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нем можно провести так, чтобы все части, на которые они разобьют n-угольник, оказались треугольниками?

М. Хованов, ученик 10 кл., Москва

М1109. В одном старом задачнике по геометрии была помещена такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y=x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равной а) 3; б) 1988?

В. С. Шевелев

М1110. Для данного натурального $n>1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n. Докажите, что а) среднее арифметическое всех $n(n-1)/2$ выписанных чисел неограниченно растет с ростом n, но не превосходит $\ln n+1$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 при любом n.

В. Ф. Лев

Ф1118. Рыбак, живший в устье впадающей в океан реки, перебрался на новое место жительства на несколько километров вверх по течению. К своему удивлению, он обнаружил, что время между началом прилива и началом отлива увеличилось, а время между началом отлива и началом прилива уменьшилось. Как объяснить это обстоятельство?

А. С. Бутов

Ф1119. В узкую кювету с параллельными вертикальными стенками налили некоторое количество жидкости (рис. 1). Затем кювету начали вращать вокруг вертикальной оси симметрии $O—O$. При некоторой скорости вращения обнажается k-я часть площади дна. Как при этом изменилась сила давления на дно и на узкие боковые стенки (по сравнению со случаем неподвижной кюветы)? При вращении жидкость не выплескивается. Поверхностным натяжением пренебречь.

Г. С. Лапидус

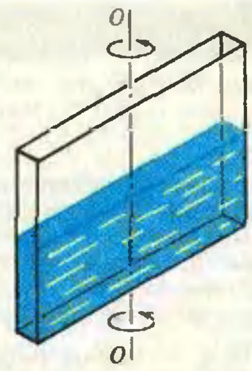


Рис. 1.

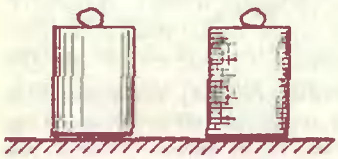


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1120. Для сравнения теплопроводностей различных материалов предлагалось использовать следующий метод. На горячую плиту ставятся два одинаковых цилиндра из исследуемых материалов (рис. 2). На цилиндры кладут по кусочку воска. Где скорее воск начнет таять — тот цилиндр и обладает лучшей теплопроводностью. Верен ли этот метод?

А. И. Буздин

Ф1121. Металлический шар радиусом ρ, удаленный от других предметов, заземлен через сопротивление R. На шар налетает пучок электронов, скорость которых вдали от шара была v. В секунду на шар попадает n электронов. Какое количество теплоты выделяется на шаре за секунду? Каков заряд шара?

И. Ф. Гинзбург

Ф1122. Известны случаи наблюдения миража моря в *пустыне. На каком расстоянии от наблюдателя возникает* такой мираж? Считать, что скорость света в приземном слое в пустыне меняется по закону $c(z)=c_0(1-\alpha z)$, где c_0 — скорость света у поверхности земли, z — высота над поверхностью.

Б. И. Клячин

Problems

M1106 — M1110, P1118 — P1122

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstam-

M1106. Each of the three lines joining the midpoints of the opposite sides of a convex hexagon divide its area in half. Prove that these lines intersect at one common point.

V. V. Proizvolov

M1107. Prove the inequality

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3,$$

where a, b, c are the sides of a triangle.

L. D. Kurlyandchik

M1108. No three diagonals of a convex n vertex polygon have a single common point inside it ($n\geqslant4$). What largest number of diagonals may be drawn so that all the parts into which they split the polygon are triangles?

M. Khovanov, 10th form student, Moscow

M1109. An old geometry problem book contains the following exercise: compute the length of the sides of an equilateral triangle inscribed in the parabola $y=x^2$. As a hint for finding the solution, the authors claim that one of the vertices must coincide with the parabola's vertex. Is this correct? Can the side of the inscribed equilateral triangle equal a) 3; b) 1988?

V. S. Shevelev

M1110. For a given integer $n>1$ select all the greatest common divisors of pairs of distinct integers from 1 to n.

ped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

Prove that a) the arithmetical mean of all the $n(n-1)/2$ selected numbers increases unboundedly with n, but does not become greater than $\log n+1$; b) their geometric mean is no greater than 10 for all n.

V. F. Lev

P1118. A fisherman who lived near the ocean delta of a big river moved to a new house further upstream by a few kilometers. To his surprise he discovered that the time interval between the beginning of the incoming tide and the outgoing one was increased, while the interval between the outgoing and incoming tides was decreased. How can this fact be explained?

A. S. Butov

P1119. A narrow trough with parallel vertical walls contains a certain amount of liquid (see figure Рис. 1). The trough is rotated about its vertical symmetry axis O—O. At some velocity of rotation the k-th part of the bottom's area is cleared. How does the pressure of the liquid on the bottom and the narrow side walls of the trough change (as compared to the case when the trough is motionless)? The liquid does not spill out during rotation. Surface tension may be neglected.

G. S. Lapidus

P1120. The following method was proposed to compare the heat conductivity of various materials. Two identically shaped cylinders made out of the two materials under study are placed on a heater (figure Рис. 2). Small pieces of wax are placed on top of the cylinders. The cylinder with the highest heat conductivity must be the one where the wax will begin to melt first. Is this method sound?

A. I. Buzdin

P1121. A metal ball of radius ρ, placed far away from other objects, is grounded via a resistor R. The ball is hit by a beam of electrons whose velocity far away from the ball was v. During one second n electrons hit the ball. How much heat per second is liberated on the ball? What is the ball's charge?

I. F. Ginzburg

P1122. A mirage of the sea is sometimes observed in the desert. At what distance from the observer is such a mirage seen? Assume that light velocity near the earth surface varies according to the rule $c(z)=c_0(1-az)$, where c_0 is the velocity of light at the surface and z is the height above the surface.

B. I. Klyuchin

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1086 — М1090, Ф1097 — Ф1102

М1086. *С числом разрешается производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) число 100? б) число n?*

100		1100100
↓	$Д^2=Д\cdot Д$	↓
25		11001
↓	В	↓
24		11000
↓	$Д^3$	↓
3		11
↓	В	↓
2		10
↓	Д	↓
1		1
↓	В	↓
0		0

а), б) Задачу удобно решать с конца, т. е. искать кратчайший способ получения числа 0 из произвольного натурального n с помощью двух операций — вычитания 1 (В) и деления пополам (Д). Пусть $r(n)$ — число операций В и Д в таком кратчайшем алгоритме. Если число n нечетно, то к нему можно применить только операцию В, так что

$$r(2k+1)=1+r(2k).$$

Покажем индукцией по k, что $r(2k)=1+r(k)$, т. е. четное число в кратчайшем алгоритме надо делить пополам. Для $k=1$ это ясно. Пусть это доказано для всех чисел, меньших k. Если к числу $2k$ сначала применить операцию В (вычесть 1), то число операций до получения 0 будет не меньше, чем

$$1+r(2k-1)=2+r(2k-2)=3+r(k-1)$$

(по предположению индукции). Если же сначала делить $2k$ пополам, а дальше идти по оптимальному пути, то число операций будет $1+r(k)\leqslant 2+r(k-1)$. Таким образом, второй способ заведомо быстрее.

Чтобы узнать, сколько операций потребуется в кратчайшем алгоритме для заданного числа n, представим n в виде суммы степеней двойки: $n=2^{k_1}+2^{k_1+k_2}+\ldots+2^{k_1+k_2+\ldots+k_m}$, где k_1 неотрицательное, а $k_2, \ldots, k_m$ — положительные целые числа ($k_1, k_1+k_2, \ldots$ — это номера разрядов двоичной записи n, в которых стоят единицы). Тогда

$$r(n)=k_1+r(n/2^{k_1})=k_1+1+r(2^{k_2}+\ldots+2^{k_2+\ldots+k_m})=\ldots$$
$$\ldots=(k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_m+1)=$$
$$=(k_1+k_2+\ldots+k_m)+m=[\log_2 n]+m$$

($[x]$ — целая часть x), поскольку $k_1+k_2+\ldots+k_m$ — это показатель наибольшей степени двойки, не превосходящей n. Отметим, что m равно количеству единиц в двоичной записи числа n. В частности, для $n=100$ получаем о т в е т к задаче а): $r(100)=9$.

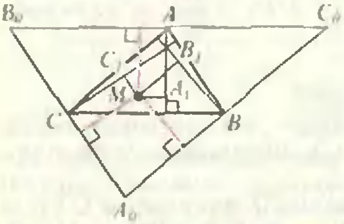
На полях показано превращение числа 100 в 0 в десятичной и двоичной записи. Поскольку $100=2^6+2^5+2^2$, получаем $r(100)=6+3=9$.

М. В. Сапир

М1087. *Рассмотрим треугольник ABC, точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1, C_1 точки M на высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно. Докажите, что*
а) существует одна и только одна точка M, для которой отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

а), б) Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне (и перпендикулярную соответствующей высоте). Эти прямые ограничат треугольник $A_0B_0C_0$ (см. рисунок), подобный данному с коэффициентом 2. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны расстояниям от точки M до сторон B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 нового треугольника. Поэтому равенство $AA_1=BB_1=CC_1$ возможно тогда и только тогда, когда точка M равноудалена от сторон треугольника $A_0B_0C_0$, т. е. является центром его вписанной окружности. В этом случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны по длине радиусу этой окружности или диаметру d

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник ABC окружности.



Задачник „Кванта"

вписанной окружности треугольника ABC (вспомним о подобии наших треугольников!).

Найденная выше точка M лежит внутри треугольника ABC, так как все его высоты больше d. Некоторые читатели под «проекцией на высоту» понимали проекцию на прямую, содержащую высоту. При таком понимании имеется еще ровно три точки, удовлетворяющие условию,— центры вневписанных окружностей треугольника $A_0B_0C_0$.

А. Х. Джафаров

М1088. *Докажите, что если числа p, q, r рациональны и $pq+qr+pr=1$, то $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ — квадрат рационального числа.*

По условию $1+p^2=qr+pq+pr+p^2=(q+p)(r+p)$. Записывая аналогично два других сомножителя рассматриваемого выражения, получим

$$(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)=((q+p)(r+p)(q+r))^2.$$

И. Варга, В. Н. Дубровский

М1089. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площадью S диагонали пересекаются в точке O. Пусть K, L, M, N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что произведение периметров четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ не меньше $4S$.*

Пусть k, l, m, n — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD, DOA. Тогда периметр $KLMN$ не меньше, чем $2(k+l+m+n)$ ($KL\geqslant k+l$, $LM\geqslant l+m$, и т. д.; рис. 1). Но $k=2S_{AOB}/P_{AOB}$, где буквы S и P обозначают площадь и периметр, а $P_{AOB}\leqslant P_{ABCD}$. Аналогично оцениваются величины l, m, n. Следовательно,

$$P_{KLMN}\geqslant 4\frac{S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}}{P_{ABCD}}=\frac{4S}{P_{ABCD}},$$

что и требовалось доказать.

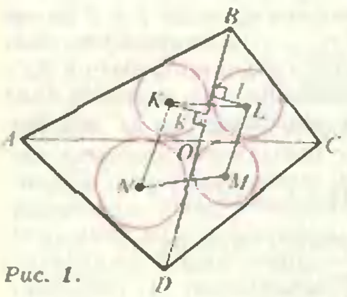


Рис. 1.

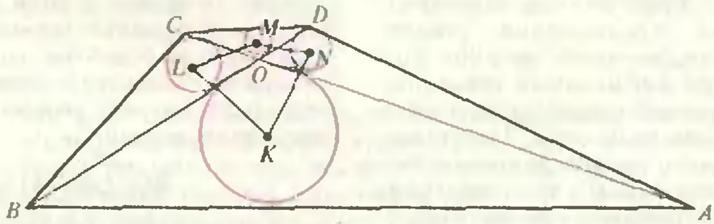


Рис. 2.

Заметим, что число 4 в нашем неравенстве увеличить нельзя. Действительно, фиксируем в четырехугольнике $ABCD$ основание AB и точку пересечения диагоналей O, а длину BC устремим к нулю (рис. 2), тогда

$$P_{KLMN}\to 2LN,\ P_{ABCD}\to P_{AOB},\ S=S_{ABCD}\to S_{AOB}.$$

Поэтому

$$\frac{P_{KLMN}\cdot P_{ABCD}}{S}\to 2LN\frac{P_{AOB}}{S_{AOB}}=4\frac{LN}{k}.$$

Но отношение LN/k за счет увеличения угла AOB можно сделать сколь угодно близким к 1. Следовательно,

Задачник „Кванта"

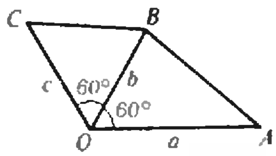
величина $P_{KLMN} \cdot P_{ABCD}/S$ может быть сколь угодно близка к 4.

Д. Ю. Бураго, Ф. Л. Назаров

М1090. *Докажите, что а) для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство*

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2};$$

б) неравенство из п. а) обращается в равенство, если и только если $1/a + 1/c = 1/b$.



а) Доказываемое неравенство — это алгебраическая запись одного частного случая неравенства треугольника.

Отложим от произвольной точки O три отрезка $OA = a$, $OB = b$ и $OC = c$ так, что $\angle AOB = \angle BOC = 60°$, $\angle AOC = 120°$ (см. рисунок). По теореме косинусов

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$, $AC = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$,

а по неравенству треугольника $AB + BC \geqslant AC$.

б) Равенство возникает тогда и только тогда, когда точка B попадает на отрезок AC или, что равносильно, когда площадь треугольника AOC равна сумме площадей AOB и BOC, т. е. $(ac \sin 120°)/2 = ((ab + bc) \sin 60°)/2$. Деля обе части этого равенства на $abc\sqrt{3}/4$, получим доказываемое условие $1/b = 1/a + 1/c$ ($\sin 120° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$).

Ю. В. Дейкало

Ф1097. *Для уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Какой наименьшей толщины пленку с показателем преломления $n = 4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) света, содержащего излучение двух длин волн с $\lambda_1 = 700$ нм и $\lambda_2 = 420$ нм, отраженный свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?*

Пусть на пленку толщиной h падает плоская световая волна с длиной волны в вакууме λ. После частичного отражения от верхней и нижней поверхностей пленки в обратном направлении (см. рисунок) идут волны *1* и *2*. Если световая волна падает нормально к поверхности пленки, то разность хода отраженных волн *1* и *2* равна удвоенной толщине пленки. Чтобы отраженный свет был максимально ослаблен, волны *1* и *2* должны быть в противофазе. Чтобы это условие выполнялось, разность хода волн *1* и *2* должна равняться нечетному числу половин длин волн в пленке:

$$2h = (2k - 1)\frac{\lambda}{2n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где λ/n — длина волны в пленке. Отсюда

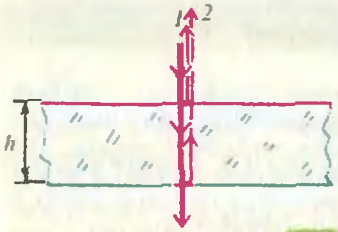
$$h = \frac{(2k-1)\lambda}{4n}.$$

Как видим, h зависит от длины волны. Максимальное ослабление света на длинах волн λ_1 и λ_2 будет при следующих толщинах пленки:

$$h_1 = \frac{\lambda_1}{4n}, \frac{3\lambda_1}{4n}, \frac{5\lambda_1}{4n}, \ldots = \frac{700}{4n}, \frac{2100}{4n}, \frac{3500}{4n}, \ldots,$$

$$h_2 = \frac{\lambda_2}{4n}, \frac{3\lambda_2}{4n}, \frac{5\lambda_2}{4n}, \ldots = \frac{420}{4n}, \frac{1260}{4n}, \frac{2100}{4n}, \ldots$$

(h_1 и h_2 — в нанометрах). Из сравнения этих двух наборов заключаем, что наименьшие совпадающие значения h_1 и h_2 равны $\frac{2100}{4n}$ нм ≈ 394 нм.



Итак, наименьшая толщина пленки, при которой отраженный свет максимально ослаблен для обеих длин волн, — $h \approx 394$ нм.

В. И. Чивилёв

Ф1098. *Детский пистолет, который можно представить в виде пружины конечной массы, прикрепленной к неподвижной стене, выстреливает шариком, сообщая ему скорость v. Если выстрелить шариком вдвое большей массы, его скорость будет $v\sqrt{2/3}$. Какова будет скорость шарика утроенной массы?*

Разгон шарика пружиной продолжается до тех пор, пока пружина не окажется в равновесном состоянии. Если к этому моменту шарик набирает скорость v, то такова же и скорость свободного (не закрепленного у стены) конца пружины. Кинетическую энергию пружины, у которой в равновесном состоянии один конец покоится, а другой имеет скорость v, можно представить в виде $\alpha M v^2/2$, где M — масса пружины, равномерно распределенная по ее длине, α — числовой коэффициент, не зависящий от скорости конца пружины.

Запишем закон сохранения энергии для всех трех случаев (для шариков массой m, $2m$, $3m$), считая начальное сжатие пружины каждый раз одним и тем же и равным x_0:

$$\frac{kx_0^2}{2}=\frac{m}{2}v^2+\frac{1}{2}\alpha M v^2,$$

$$\frac{kx_0^2}{2}=\frac{2m}{2}\left(\frac{2}{3}v^2\right)+\frac{1}{2}\alpha M\left(\frac{2}{3}v^2\right),$$

$$\frac{kx_0^2}{2}=\frac{3m}{2}u^2+\frac{1}{2}\alpha M u^2.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем скорость u, которую набирает при выстреле шарик массой $3m$:

$$u=v\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

П. И. Зубков

Ф1099. *В горизонтально закрепленной открытой с концов трубе сечением S находятся два поршня (см. рисунок). В исходном состоянии левый поршень соединен с неподвижной стенкой недеформированной пружиной жесткостью k. Давление p_0 газа между поршнями равно внешнему давлению, расстояние H от правого поршня до края трубы равно расстоянию между поршнями. Правый поршень медленно вытягивают к краю трубы. Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы удержать его в крайнем*

По мере вытягивания правого поршня давление газа между поршнями будет уменьшаться, левый поршень будет смещаться вправо, растягивая пружину.

Запишем условия равновесия поршней в положении, когда правый поршень выдвинут до края трубы и к нему приложена сила F (см. рисунок):

для левого поршня —

$$p_0S-pS-kx=0;$$

для правого поршня —

$$F+pS-p_0S=0 \qquad (*)$$

(p — давление газа между поршнями). Из этих уравнений следует, что

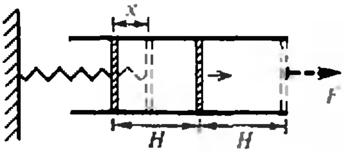
$$F=p_0S-pS=kx.$$

Так как температура постоянна, согласно закону Бойля — Мариотта для газа между поршнями имеем:

$$p_0HS=p(2H-x)S,$$

откуда

положении? Трение пренебрежимо мало, температура постоянна.



$$p=\frac{p_0H}{2H-x}=\frac{p_0H}{2H-F/k}=\frac{p_0kH}{2kH-F}.$$

Подставив это выражение для p в (*), получим для F квадратное уравнение:

$$F^2-(p_0S+2kH)F+p_0SkH=0.$$

Его решения —

$$F_{1,2}=\frac{p_0S}{2}+kH\pm\sqrt{\frac{p_0^2S^2}{4}+k^2H^2}.$$

Поскольку ясно, что $F=0$ при $k=0$, окончательно получаем:

$$F=\frac{p_0S}{2}+kH-\sqrt{\frac{p_0^2S^2}{4}+k^2H^2}.$$

В. П. Бородин

Ф1100. *Достаточно длинный капилляр, погруженный в сосуд с водой, герметически закрывают сверху. При этом уровень жидкости в капилляре понижается на $\Delta h=4$ см. Чему равна относительная влажность воздуха у поверхности воды в сосуде, если температура окружающего воздуха 20 °С?*

Когда верхний конец капилляра будет закрыт, водяной пар, находящийся в свободном от воды верхнем конце капилляра, станет насыщенным, и парциальное давление пара увеличится. Из-за этого и понизится уровень воды в капилляре (так как на уровне воды в сосуде давление остается постоянным).

Запишем условия равновесия воды в капилляре, находящейся на уровне свободной поверхности воды в сосуде, до и после закрытия капилляра:

до закрытия —

$$p_п+p_в-\frac{\sigma}{2r}+\rho gh=p_п+p_в, \qquad (1)$$

после закрытия —

$$p_н+p_в-\frac{\sigma}{2r}+\rho g(h-\Delta h)=p_п+p_в. \qquad (2)$$

Здесь $(p_п+p_в)$ — давление у поверхности воды в сосуде, равное сумме парциальных давлений пара и сухого воздуха; $\left(p_п+p_в-\frac{\sigma}{2r}\right)$ — давление над искривленной поверхностью воды в открытом капилляре (r — радиус капилляра, σ — поверхностное натяжение воды); $p_н$ — давление насыщенного водяного пара при температуре 20 °С; давление сухого воздуха $p_в$ в капилляре можно считать неизменным, так как капилляр достаточно длинный.

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$p_н-p_п=\rho g\cdot\Delta h,\ \text{или}\ \frac{p_п}{p_н}=1-\frac{\rho g\cdot\Delta h}{p_н}.$$

Но $\frac{p_п}{p_н}100\ \%$ — это и есть искомая влажность воздуха φ у поверхности воды в сосуде. Таким образом,

$$\varphi=\left(1-\frac{\rho g\cdot\Delta h}{p_н}\right)100\%.$$

Взяв из таблицы значение $p_н=2{,}33\cdot10^3$ Па и подставив $\rho=10^3$ кг/м^3, $g=9{,}8$ м/с^2, $\Delta h=4\cdot10^{-2}$ м, получим $\varphi\approx83\ \%$.

Л. Г. Маркович

Ф1101. *Легкий горизонтальный стержень длиной 2a может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Одинаковые массивные шары насажены на стержень и могут перемещаться вдоль него без трения и упруго отражаться от упоров на его концах (рис. 1). Сначала шары закреплены на расстояниях a/2 от оси. Стержень раскручивают до угловой скорости ω_0, после чего шары одновременно освобождают. По каким траекториям будут двигаться шары? За какое время стержень совершит полный оборот? Построить график зависимости $\omega(t)$. Размеры шаров много меньше длины стержня.*

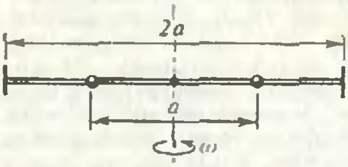


Рис. 1.

Рис. 2.

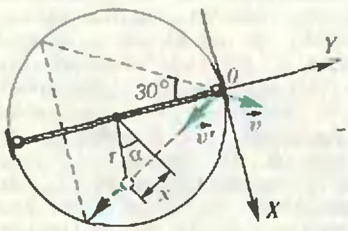


Рис. 3.

В силу симметрии начального расположения и начальных скоростей шары всегда будут находиться в симметричных точках и иметь симметричные скорости. Тогда легко показать, что шары будут двигаться свободно, кроме моментов отражения от упоров.

Действительно, предположим, что на шар A действует сила $\vec{F}$, перпендикулярная стержню (продольных сил нет, так как нет трения). Тогда из соображений симметрии на шар B должна действовать сила $-\vec{F}$ (рис. 2). Но это означает, что со стороны шаров на стержень будет действовать раскручивающая его пара сил. Пренебрегая массой стержня по сравнению с массами шаров, заключаем, что эти силы должны быть пренебрежимо малы (в пределе для того, чтобы поворачивать невесомый стержень, сил вообще не требуется). Таким образом, мы приходим к выводу, что между столкновениями с упорами шары будут двигаться равномерно и прямолинейно.

Проанализируем теперь столкновения шаров с упорами. Во-первых, при столкновении сохраняется X-компонента импульса (рис. 3), так как иначе на шары в момент удара будут действовать силы, перпендикулярные стержню, что невозможно в силу предыдущих рассуждений. Во-вторых, в силу упругости соударений сохраняется энергия. Поэтому при соударениях шаров с упорами выполняется закон равенства углов падения и отражения.

Из приведенных рассуждений и геометрии задачи ясно, что траекторией каждого шара будет равносторонний треугольник со стороной $l=2a\cos 30° = a\sqrt{3}$ (см. рис. 3).

Стержень совершит полный оборот за время T, которое понадобится шару, чтобы обойти такой треугольник со скоростью, равной начальной скорости $v_0=\omega_0 a/2$. Таким образом,

$$T=3l/v_0=6\sqrt{3}/\omega_0.$$

Найдем зависимость $\omega(t)$. Понятно, что $\omega=v_t/r$, где v_t — перпендикулярная к радиусу компонента скорости шара, т. е. $v_t=v\cos\alpha=va/2r$. Следовательно,

$$\omega=va/2r^2=\omega_0/(1+(2x/a)^2)$$

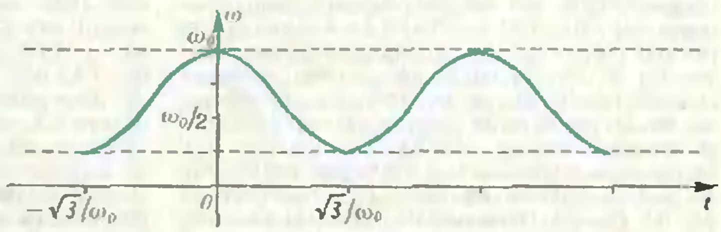


Рис. 4.

(см. рис. 3). Если начинать с момента, когда $\alpha=0$, то $x=v_0t$,

$$\omega=\omega_0/(1+(\omega_0 t)^2) \text{ при } -\sqrt{3}/\omega_0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}/\omega_0.$$

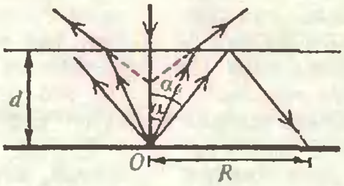
В момент $t=\sqrt{3}/\omega_0$ произойдет удар об упор, и цикл повторится (см. рис. 4).

А. Ю. Алексеев

Задачник «Кванта»

Ф1102. *Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена так, что может рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей, а вокруг — светлый ореол. Объясните явление.*

Лазерный луч попадает в точку O закрашенной поверхности (см. рисунок). Лучи рассеянного света, исходящие из точки O под углом α, меньшим α_0 (α_0 — угол полного внутреннего отражения), выходят из пластинки и создают изображение светящейся точки O. Лучи, исходящие из точки O под углом, большим α_0, снова попадают на закрашенную поверхность и освещают ее, создавая светящийся ореол. При этом радиус R неосвещенной области равен $2d\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$, где d — толщина пластинки.



А. М. Шалагин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1061—М1075, Ф1073—Ф1087, справились с задачами М1071, М1072, М1075, Ф1073, Ф1076, Ф1078, Ф1084, Ф1086. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ц. Адриан (Каракал, СРР) 62; *А. Акимов* (Евпатория) 67—69; *Д. Алиевский* (Свердловск) 68, 70; *И. Аржанцев* (Киев) 61, 62, 66, 67, 69, 70; *Р. Арустамян* (Ереван) 61; *С. Аршава* (Усинск) 62, 63, 65—67, 69, 70; *А. Бабкин* (Киев) 62, 66—68; *З. Бандик* (СФРЮ) 62, 63, 68; *В. Барановский* (Омск) 73; *В. Бодулеску* (Тимишоара, СРР) 63; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 62, 65—70, 73; *В. Бзикадзе* (Тбилиси) 73; *Т. Бозжонов* (Алма-Ата) 68; *Ж. Бопаев* (Талды-Курган) 67; *Я. Бренер* (Вильнюс) 64; *Ц. Василев* (София, НРБ) 64; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 63, 66, 68, 69, 73, 74; *А. Виницкий* (Калуга) 62, 68, 73; *А. Винцюк* (Киев) 68, 70, 73; *А. Витяев* (Новосибирск) 63; *В. Вологодский* (Омск) 61, 63, 64; *П. Волфбейн* (Киев) 68, 69; *В. Волчков* (Шахтерск) 61—70, 73, 74; *Д. Вольпер* (Омск) 61—64, 66—70, 73, 74; *М. Всемирнов* (Ленинград) 62, 63, 66, 68, 69, 73; *М. Выборнов* (Киев) 68, 73; *С. Гарданов* (Керчь) 62; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 66—70; *М. Гольдштейн* (Челябинск) 63; *А. Гороховский* (Киев) 62—64; *Р. Гринив* (Львов) 61—63; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 66, 69; *И. Жарков* (Свердловск) 61, 62, 64; *Ю. Журавель* (Киев) 66, 68; *В. Завражний* (Фрунзе) 69; *Н. Зверев* (Москва) 62; *С. Зелик* (Краматорск) 61—63, 66—70, 74; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 61—64, 68—70, 73, 74; *Т. Ионеску* (Будапешт, ВНР) 62; *А. Калинин* (Саратов) 61—64, 67, 69, 70, 73; *В. Калошин* (Харьков) 61—64, 66—70, 73, 74; *А. Караваев* (Волгоград) 61; *С. Кириллов* (Одесса) 61, 69; *О. Кирнасовский* (Винница) 62, 66, 67, 69, 70, 73, 74; *С. Коваценко* (Винница) 62, 67—70, 73; *О Коврижкин* (Майкоп) 63, 66, 69, 70; *А. Козачко* (Винница) 62, 67—70, 73; *И. Кокорев* (Ленинград) 62, 63, 66, 68—70, 73, 74; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 61; *М. Колодей* (Омск) 73, 74; *А. Кондратьев* (Отрадное Ленинградской обл.) 69; *А. Коршнов* (Мозырь) 61—63, 68—70; *Д. Косоня* (Белорецк) 61—64, 66—69; *В. Крепец* (Новосибирск) 62, 67, 68, 73; *О. Крепец* (Новосибирск) 68; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 62, 66, 68, 70, 74; *В. Куватбекова* (Фрунзе) 66, 73; *А. Кулик* (Киев) 61—64, 66—70, 73, 74; *С. Лесик* (Донецк) 61, 66, 68—70, 74; *А. Лосев* (Ленинград) 62, 66, 68—70, 73, 74; *В. Лысенков* (Белорецк) 61—64, 66—69, 74; *С. Ляшенко* (Харьков) 69; *И. Марков* (Киев) 61, 64, 68, 69; *Т. Мартиросова* (Ташкент) 66, 67, 69, 73; *М. Марченко* (Гайворон) 73; *В. Матвеев* (Москва) 61—64, 68, 69, 73, 74; *О. Мельник* (Шевченко) 66; *А. Мельников* (Краснодар) 61, 66, 73; *А. Мельцер* (Ленинград) 66, 69, 70, 73, 74; *М. Мельцер* (Вильнюс) 63, 66, 69, 70; *С. Морозов* (Заволжье) 61; *А. Морозова* (Одесса) 67, 68; *Я. Мустафаев* (Баку) 62, 63, 65—70, 73, 74; *А. Назарян* (Тбилиси) 61—63; *Д. Никшич* (Киев) 67, 69, 73; *И. Опульский* (Киев) 61—63, 67—70, 73, 74; *О. Павлов* (Новосибирск) 63, 73, 74; *С. Павлов* (Новосибирск) 61, 62, 68—70; *В. Павлунин* (Фрунзе) 63, 64, 66, 69; *А. Паламарчук* (Киев) 73; *А. Паршин* (Омск) 73, 74; *А. Пиковский* (Киев) 62, 63; *Д. Погребинский* (Киев) 63; *В. Полищук* (Киев) 61, 62, 66—70; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 62, 63, 66, 68—70, 73, 74; *В. Рагулин* (Москва) 61, 63, 74; *В. Радулеску* (Каракал, СРР) 73; *Л. Рябова* (Клин) 67; *В. Савчик* (п. Ахмедлы АзССР) 73; *А. Савчин* (Киев) 68; *Д. Синиц-*

кий (Ленинград) **61—70, 73, 74**; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) **66—70, 73, 74**; *А. Скопенков* (Саратов) **62—65, 67, 68, 70, 73**; *В. Слитинский* (Киев) **61—70**; *Д. Смирнников* (Подпорожье) **69**; *Ю. Соколов* (Челябинск) **73, 74**; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) **61, 62**; *Д. Сторожук* (Киев) **69**; *В. Стрижевский* (Одесса) **61, 67—69**; *Г. Тер-Сааков* (Баку) **61, 62, 66, 68, 70**; *С. Тер-Саакова* (Баку) **61, 62, 66, 68, 70**; *С. Тихонов* (Воронеж) **66, 68, 69**; *Ю. Томилов* (Киев) **62—64**; *Д. Туляков* (Жданов) **67—69**; *Д. Турсунов* (Караганда) **61, 63, 64, 66, 68, 69, 73, 74**; *А. Устинов* (Плавск) **69**; *К. Ушаков* (Киев) **66, 68—70**; *П. Федосеев* (Новгород) **68, 69**; *В. Федотов* (Москва) **68, 70**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **61—64, 66—70, 73, 74**; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) **68, 69**; *В. Филлипов* (Киев) **73**; *Ф. Фот* (Томск) **62, 63, 70**; *В. Харламов* (Ленинград) **73**; *О. Христенко* (Караганда) **61, 63, 64, 66, 68, 69, 73, 74**; *Д. Черников* (Баку) **66, 68**; *А. Шаповал* (Киев) **62, 66—69**; *Л. Шахбагян* (Ереван) **69**; *К. Щербаков* (Арзамас) **61, 63, 66, 67, 69**; *В. Эйгес* (Москва) **67**; *Я. Эфендиев* (Баку) **62, 63, 66, 68—70, 73**.

Физика

И. и Х. Абдулазизовы (Шекинский р-н АзССР) **74, 75**; *В. Адамия* (Тула) **74, 75, 77**; *Х. Акимов* (к/х «Москва» Шаватского р-на УзССР) **74, 75, 77, 79—82**; *О. Армоник* (Гродно) **77**; *Ю. Артемов* (Джамбулский р-н Алма-Атинской обл.) **80, 81**; *А. Андрианов* (Кузнецовск) **74, 75, 77**; *Р. Арустамян* (Ереван) **87**; *А. Афонин* (Брест) **74, 79—82**; *Н. Бабенко* (Киев) **81**; *А. Бабкин* (Киев) **74, 77**; *А. Баландина* (Воркута) **74, 75**; *А. Белецкий* (Канев) **74, 75, 80**; *С. Белоусов* (Ленинград) **75, 77**; *С. Бенчисова* (Старый Оскол) **83**; *Д. Беседных* (Киев) **74, 75, 77**; *В. Бескровный* (Донецк) **75, 80**; *А. Билибин* (Боровичи) **74, 75, 77, 79—82**; *С. Бобровник* (Черновцы) **74, 77, 80, 81, 87**; *А. Богданов* (Мичуринск) **75, 77, 83**; *А. Бузунов* (Киев) **74, 77**; *С. Бусленко* (Тула) **74, 75, 81, 82, 87**; *А. Бучель* (Луцк) **74, 77, 79—81**; *В. Быдзан* (Киев) **74**; *М. Ванюшов* (Ленинград) **80, 83**; *А. Винцюк* (Киев) **82, 83**; *В. Вовк* (Барвенково) **77**; *П. Вольфбейн* (Киев) **74, 75, 77, 79—82**; *В. Гавенский* (Баку) **74, 77, 85**; *А. Гончаров* (Новосибирск) **74, 75, 77, 82, 83, 85, 87**; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *Р. Губарев* (Тула) **74, 75, 77**; *Б. Гуревич* (Саратов) **74, 75, 77, 81—83, 85, 87**; *С. Гусев* (Лобня) **74**; *В. Гусятников* (Москва) **74, 80**; *С. Дворник* (Талды-Курган) **74, 77, 79, 80, 82, 87**; *Б. Дейч* (Харьков) **83, 87**; *Е. Демлер* (Новосибирск) **74, 75, 77, 82, 83, 85, 87**; *Е. Демченко* (Жданов) **74**; *А. Долуханян* (Баку) **77**; *В. Дядечко* (Винница) **74, 75, 77**; *А. Езерский* (Минск) **74, 75, 77, 79—83, 87**; *В. Завадский* (Минск) **77**; *В. Завражный* (Фрунзе) **74, 77**; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) **81**; *Ф. Занин* (Старый Оскол) **83**; *Д. Звонов* (Челябинск) **85**; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) **75**; *Е. Зельцер* (Киев) **74, 75, 77, 79, 82**; *А. Зискинд* (Винница) **74, 75, 77, 87**; *К. Зуев* (Вологда) **74, 77**; *Г. Исрафилов* (Шекинский р-н АзССР) **74, 75**; *М. Ифиев* (Москва) **75**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **81**; *Е. Казьмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *В. Каменькович* (Харьков) **74, 77**; *В. Камчатный* (Киев) **74, 75**; *А. Капустин* (Москва) **74, 75, 80—83, 87**; *В. Касабян* (Баку) **75**; *А. Ключанов* (Алма-Ата) **74, 77**; *Р. Кобзев* (Канев) **74, 75, 80**; *С. Коваценко* (Винница) **83**; *А. Колесник* (Старый Оскол) **83**; *М. Колпаков* (Абанский р-н Красноярского кр.) **87**; *А. Комник* (Старый Оскол) **81—83, 87**; *О. Кондратьев* (Брест) **75, 80, 87**; *Д. Коростелкин* (Киев) **74**; *Е. Корсунский* (Харьков) **74, 75, 77**; *А. Коршиков* (Мозырь) **74, 75, 77, 81, 85, 87**; *А. Корытько* (Киев) **74**; *С. Кравец* (Старый Оскол) **74, 77**; *Ю. Кравченко* (Москва) **83, 87**; *К. Краснов* (Киев) **74**; *И. Королев* (Старый Оскол) **77**; *М. Кудава* (Тбилиси) **74, 80—82**; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) **83**; *Ю. Кумпан* (Москва) **74, 77**; *О. Кушнир* (Дубляны) **74, 75, 87**; *В. Лашко* (Глазов) **75**; *Ю. Левин* (Харьков) **74, 81**; *В. Лендерман* (Киев) **74, 77**; *И. Лохтин* (Москва) **74**; *С. Луганский* (Москва) **74, 82**; *О. Лугуев* (Махачкала) **75, 85**; *А. Лутовинов* (Мичуринск) **79, 81**; *М. Лысянский* (Новосибирск) **87**; *А. Мазуренко* (Минск) **74, 75, 77, 79—82, 87**; *А. Майков* (Старый Оскол) **77, 81, 82, 87**; *Р. Маяков* (Саратов) **74, 77, 79—82, 87**; *А. Мамаев* (Заволжье) **74, 77, 79—81, 85, 87**; *Д. Матрасулов* (Хазарасп) **83**; *А. Мацко* (Киев) **74, 75, 77, 82, 83**; *А. Мелеховец* (Брест) **74, 75, 87**; *О. Мельников* (Красноярск) **74, 75, 85**; *В. Меркер* (Старый Оскол) **81, 83, 87**; *А. Мина* (Киев) **74, 80**; *А. Митусов* (Ефремов) **75**; *А. Михайлова* (Старый Оскол) **81**; *Н. Михайловский* (Красноярск) **75, 80, 87**; *П. Михеев* (Старый Оскол) **81**; *Я. Михеев* (Киев) **74**; *К. Моршнев* (Фрязино) **74, 77, 79, 81**; *Р. Москвин* (Раменское) **74, 77, 85, 87**; *И. Набиев* (Баку) **74**; *А. Натаров* (Белгород) **83**; *О. Наумов* (Заволжье) **85**; *К. Недбаев* (Брест) **75, 87**; *М. Недвига* (Корсунь-Шевченковский) **83**; *К. Николоев* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *А. Новик* (Мозырь) **74, 75, 77, 79, 81, 87**; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) **74, 75, 77**; *А. Носенко* (Коммунарск) **75, 77, 79—81**; *М. Оконь* (Старый Оскол) **83, 87**; *В. Ольховец* (Киев) **77**; *А. Ольшанский* (Жданов) **74**; *З. Османов* (Тбилиси) **74, 77**; *В. Павлунин* (Фрунзе) **74**; *А. Панас* (Могилев) **74, 77, 80, 83**; *И. Паниашвили* (Тбилиси) **74**; *Е. Пармузин* (Старый Оскол) **83**; *Д. Пастухов* (Москва) **74, 77, 80—83, 85**; *В. Пастушенко* (Джалал-Абад) **77**; *К. Пенанен* (Одесса) **74, 77, 79—83, 87**; *Л. Петько* (Минск) **74, 75, 77, 79—83, 87**; *В. Писаренко* (Киев) **83**; *Т. Подоляко* (Ленинград) **74, 75, 79, 81**; *А. Подтележников* (Харьков) **74, 75, 82**; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) **74, 75, 81, 87**; *П. Полынкин* (Тула) **74, 75, 77, 81, 82, 87**; *И. Рассадин* (Минск) **75, 82**; *У. Рахманов* (Новосибирск) **74, 77, 81**; *Т. Рашник* (Киев) **74, 80, 87**; *А. Резуненко* (Харьков) **74, 77**; *А. Рожков* (Калининград) **80—82, 85, 87**; *В. Романенков* (Могилев) **74**; *А. Рыжов* (Горький) **74, 81, 82**; *А. Рыжов* (Новосибирск) **81**; *Р. Сагайдак* (Канев) **74, 75, 77**; *А. Садыков* (Казань) **77, 79, 81, 82**; *С. Сазонов* (Климовск) **75**; *А. Свердлов* (Ленинград) **74**; *В. Свидзинский* (Киев) **74, 77**; *М. Сергазин* (Алма-Ата) **75, 77**; *А. Сибиряков* (Томск) **75, 80**; *Д. Симонян* (Рига) **74, 77, 79—82**; *В. Синенко* (Канев) **74, 75, 77, 80**; *М. Соколов* (Одинцово) **83, 85, 87**; *А. Стародубов* (Алма-Ата) **74, 75**;

(Окончание см. на с. 44)

НУЛЬСТОРОННИЙ ПРОФЕССОР

М. ГАРДНЕР

Долорес, стройная черноволосая звезда чикагского ночного клуба «Пурпурные шляпы», замерла в самом центре танцевальной площадки и под едва слышный аккомпанемент оркестра, наигрывавшего какую-то восточную мелодию, начала танец живота, свой знаменитый номер «Клеопатра». В зале было совсем темно, и только сверху на нее падал изумрудный луч прожектора, поблескивая на воздушном «египетском костюме» танцовщицы.

Первым должно было упасть прозрачное покрывало, ниспадавшее с головы и закрывавшее плечи Долорес. Еще мгновение,— и Долорес изящным жестом сбросила бы покрывало, как вдруг откуда-то сверху донесся громкий звук, похожий на выстрел, и с потолка головой вниз свалился обнаженный мужчина.

Поднялся невероятный переполох.

Метрдотель Джейк Боуэрс приказал дать свет и попытался успокоить зрителей. Управляющий клубом, стоявший у оркестра и наблюдавший за представлением, набросил на распростертую фигуру скатерть и перекатил ее на спину.

Незнакомец тяжело дышал и был без сознания. Ему было далеко за пятьдесят. Бросались в глаза короткая, тщательно подстриженная рыжая борода и усы. Незнакомец был совершенно лыс и по сложению напоминал профессионального борца.

С большим трудом трем официантам удалось перенести его в кабинет управляющего. Зрительный зал волновался, дамы были на грани истерики. Изумленно тараща глаза то на потолок, то друг на друга, зрители горячо обсуждали, каким образом мог упасть незнакомец. Единственная гипотеза, не чуждая здравому смыслу, состояла в том, что тело было подброшено высоко в воздух откуда-то сбоку от танцевальной площадки. Впрочем, никто из присутствовавших в зале не видел, как это произошло.

Тем временем в кабинете управляющего бородатый незнакомец пришел в себя. По его утверждению, он был доктором Станиславом Сляпенарским, профессором математики Венского университета, прибывшим по приглашению для чтения лекций в Чикагском университете.

Прежде чем продолжить этот удивительный рассказ, считаю своим долгом предуведомить читателя, что я не был очевидцем описанного эпизода и полагаюсь всецело на интервью с метрдотелем и официантами. Тем не менее мне посчастливилось принять участие в цепи необычайных событий, которые и привели к скандальному появлению профессора, наделавшему столько шума.

События эти начались за несколько часов до того, как члены общества «Мебиус» собрались на свой ежегодный банкет в одной из укромных столовых на втором этаже клуба «Пурпурные шляпы». Общество «Мебиус» — небольшая, малоизвестная чикагская организация математиков, работающих в области топологии — одного из разделов современной математики.

Объяснить человеку, далекому от математики, что такое топология, довольно трудно. Можно сказать, что топология занимается изучением тех свойств фигур, которые сохраняются независимо от того, как деформируется фигура.

Представьте себе бублик из податливой, но необычайно прочной резины, который вы можете как угодно крутить, сжимать и растягивать в любом направлении. Независимо от того, как деформирован такой бублик, некоторые его свойства остаются неизменными. Например, в нем всегда есть дыра. В тополо-

Рассказ замечательного американского популяризатора Мартина Гарднера мы перепечатываем из сборника «Трудная задача» (М.: Мир, 1982). Перевод Ю. А. Данилова.

гии бублик принято называть тором. Соломинка, через которую вы пьете коктейль, тоже тор, только вытянутый. С точки зрения топологии бублик и соломинка ничем не отличаются.

Топологию не интересуют свойства фигур, связанные с длиной, площадью, объемом и тому подобными количественными характеристиками. Она занимается изучением наиболее глубоких свойств фигур и тел, которые остаются неизменными при самых чудовищных деформациях, но без разрывов и склеиваний. Если бы тела и фигуры разрешалось разрывать и склеивать, то любое тело сколь угодно сложной структуры можно было бы превратить в любое другое тело с какой угодно структурой, и все первоначальные свойства были бы безвозвратно утрачены. Поразмыслив немного, вы поймете, что топология занимается изучением самых простых, и в то же время самых глубоких свойств, какими только обладает тело*).

Хотя еще в восемнадцатом веке многие математики бились над решением отдельных топологических задач, начало систематической работы в области топологии было положено Августом Фердинандом Мебиусом, немецким астрономом, преподававшим в Лейпцигском университете в первой половине прошлого века. До Мебиуса все думали, что у любой поверхности две стороны, как у листа бумаги. Именно Мебиус совершил обескураживающее открытие: если взять полоску бумаги, перекрутить ее на пол-оборота, а концы склеить, то получится односторонняя поверхность, обладающая не двумя, а одной-единственной стороной!

Трудно поверить, что такое вообще может быть, но односторонняя поверхность действительно существует — реальная, осязаемая вещь, которую каждый может построить в один миг. В том, что у листа Мебиуса есть лишь одна сторона, сомневаться не приходится, и это свойство он сохраняет, как бы вы не растягивали и не деформировали его.

Но вернемся к нашей истории. Я преподавал математику в Чикагском университете, докторскую диссертацию защитил по топологии, и мне без особого труда удалось вступить в общество «Мебиус». Нас было не очень много — всего лишь двадцать шесть человек, главным образом чикагских топологов, но некоторые члены общества работали в университетах соседних городов.

Мы устраивали ежемесячные заседания, носившие сугубо академический характер, но раз в году — 17 ноября (в день рождения Мебиуса) — собирались на банкет и приглашали в качестве гостя какого-нибудь знаменитого тополога, который выступал с лекцией.

В нынешнем году мы решили отпраздновать годовщину патрона нашего общества в «Пурпурных шляпах», где цены были вполне умеренные, а после лекции можно было спуститься в зал и посмотреть программу варьете. С гостем нам повезло: наше приглашение принял знаменитый профессор Сляпенарский, первый тополог мира и один из величайших математических гениев нашего века.

В «Пурпурные шляпы» я и Сляпенарский поехали вместе на такси, и по дороге я попросил его рассказать в общих чертах то, о чем он собирался говорить на лекции. Сляпенарский в ответ только улыбнулся и посоветовал запастись терпением. Тема лекции «Нульсторонние поверхности» вызвала среди членов общества «Мебиус» такие оживленные толки, что даже профессор Роберт Симпсон из Висконсинского университета письменно уведомил правление о своем намерении прибыть на банкет. Ни на одном заседании в этом году профессор Симпсон присутствовать не соизволил!

*) Чтобы пояснить суть дела, приведем типичную топологическую задачу. Представьте себе поверхность тора, сделанную из тонкой резины, наподобие велосипедной камеры. Предположим, что в стенке тора проколота крохотная дырочка. Можно ли через эту дырочку вывернуть тор наизнанку, как выворачивают велосипедную камеру? Решить эту задачу в «уме», руководствуясь только своим пространственным воображением,— дело нелегкое.

(Нужно сказать, что профессор Симпсон считался признанным авторитетом по топологии на Среднем Западе и был автором нескольких важных работ по топологии и теории поля, в которых выступал с резкими нападками на основные тезисы теории Сляпенарского.)

Мы прибыли вовремя. После того, как наш почетный гость был представлен профессору Симпсону и другим членам общества, мы сели за стол. Я обратил внимание Сляпенарского на традицию оживлять наши банкеты мелкими деталями, выдержанными в «топологическом духе». Например, серебряные кольца для салфеток были выполнены в форме листов Мебиуса. К кофе подавали специально испеченные бублики, а кофейник был изготовлен в виде «бутылки Клейна».

После моего краткого вступительного слова Сляпенарский встал, поблагодарил присутствующих улыбкой за аплодисменты и откашлялся.

Изложить сколь-нибудь подробно блестящий, но доступный пониманию только специалистов доклад Сляпенарского вряд ли возможно. Суть его сводилась к следующему. Лет десять назад Сляпенарский наткнулся в одном из менее известных трудов Мебиуса на утверждение, поразившее его воображение. По словам Мебиуса, теоретически не существовало причин, по которым поверхность не могла бы утратить обе свои стороны: иными словами, стать «нульсторонней».

Разумеется, пояснил профессор, такую поверхность невозможно представить себе наглядно, так же как квадратный корень из минус единицы или гиперкуб в четырехмерном пространстве. Но абстрактность понятия отнюдь не означает, что оно лишено смысла или не может найти применения в современной математике и физике.

Не следует забывать и о том, продолжал профессор, что те, кто никогда не видел лист Мебиуса, не могут представить себе даже одностороннюю поверхность. Немало людей с хорошо развитым математическим воображением отказываются верить в существование односторонней поверхности, даже когда лист Мебиуса у них в руках.

Я взглянул на профессора Симпсона, и мне показалось, что при этих словах он чуть заметно улыбнулся.

На протяжении многих лет, продолжал Сляпенарский, он упорно стремился построить нульстороннюю поверхность. По аналогии с известными типами поверхностей ему удалось изучить многие свойства нульсторонней поверхности. Наконец, долгожданный день настал. Сляпенарский выдержал паузу, чтобы посмотреть, какое впечатление его слова произвели на слушателей, и окинул взглядом замершую аудиторию. Его усилия увенчались успехом, и он построил нульстороннюю поверхность.

Подобно электрическому разряду, его слова обежали сидевших за столом. Каждый встрепенулся, удивленно посмотрел на соседа и уселся поудобнее. Профессор Симпсон яростно затряс головой. Когда Сляпенарский отошел в дальний конец столовой, где была приготовлена классная доска, Симпсон повернулся к соседу слева и шепнул: «Чушь несусветная! Либо Сляппи совсем спятил с ума, либо он просто вздумал подшутить над нами».

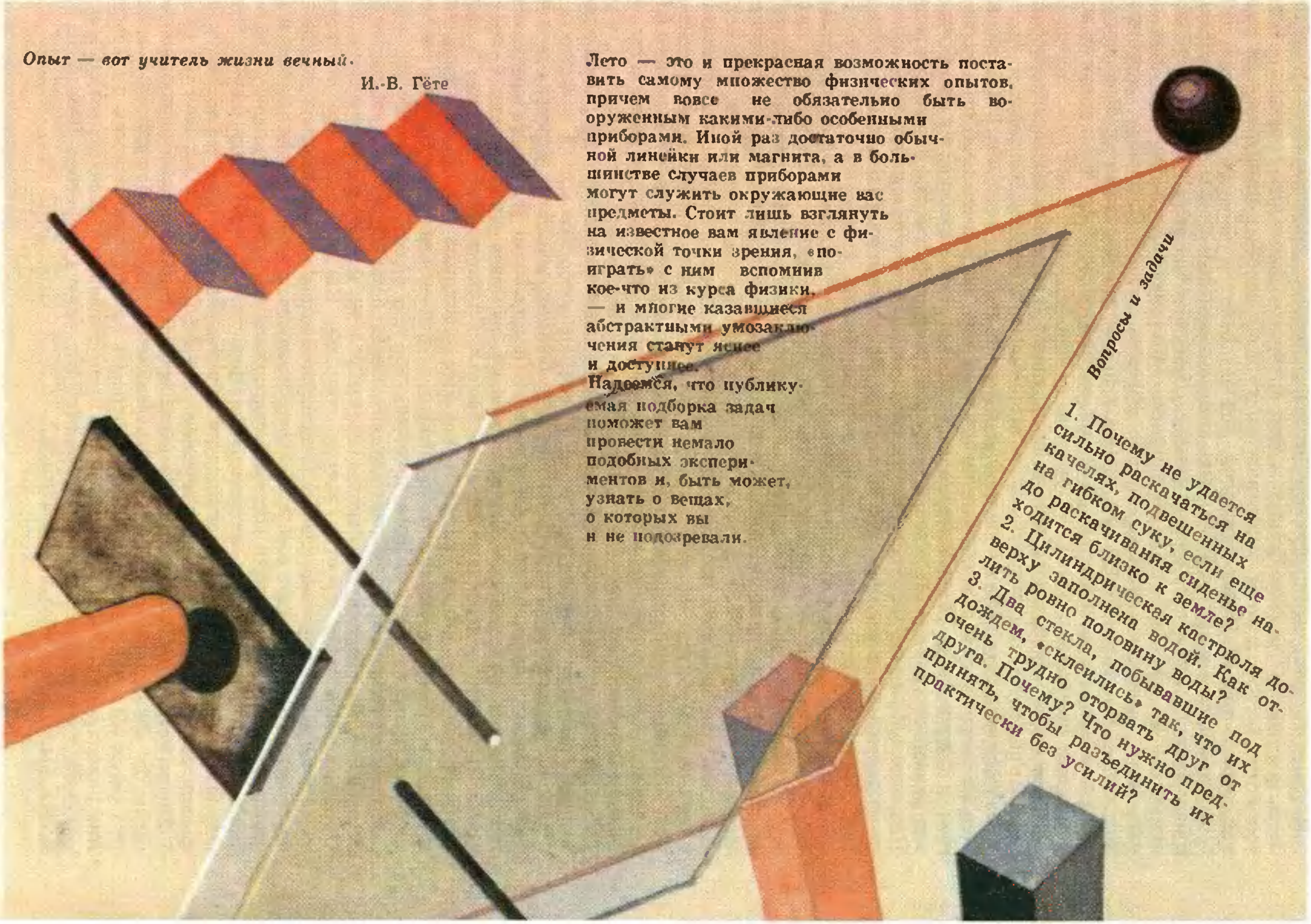
Мне кажется, что мысль о розыгрыше пришла в голову многим из присутствовавших. Я видел, как некоторые из них недоверчиво улыбались, пока профессор вычерчивал на доске сложные схемы.

После некоторых пояснений (их я полностью опускаю из опасения, что они были бы совершенно непонятны большинству читателей) профессор заявил, что хотел бы в заключение лекции построить одну из простейших нульсторонних поверхностей. К этому времени все присутствовавшие, не исключая и меня, обменивались понимающими улыбками. На лице профессора Симпсона улыбочка была несколько напряженной.

(Продолжение см. на с. 42)

Опыт — вот учитель жизни вечный.

И.-В. Гёте



Лето — это и прекрасная возможность поставить самому множество физических опытов, причем вовсе не обязательно быть вооруженным какими-либо особенными приборами. Иной раз достаточно обычной линейки или магнита, а в большинстве случаев приборами могут служить окружающие вас предметы. Стоит лишь взглянуть на известное вам явление с физической точки зрения, «поиграть» с ним, вспомнив кое-что из курса физики, — и многие казавшиеся абстрактными умозаключения станут яснее и доступнее.

Надеемся, что публикуемая подборка задач поможет вам провести немало подобных экспериментов и, быть может, узнать о вещах, о которых вы и не подозревали.

Вопросы и задачи

1. Почему не удается сильно раскачаться на качелях, подвешенных на гибком суку, если еще до раскачивания сиденье находится близко к земле?

2. Цилиндрическая кастрюля доверху заполнена водой. Как отлить ровно половину воды?

3. Два стекла, побывавшие под дождем, «склеились» так, что их очень трудно оторвать друг от друга. Почему? Что нужно предпринять, чтобы разъединить их практически без усилий?

4. Вам известно, что в алюминиевом шарике имеется большой воздушный пузырек. Можно ли узнать, где он находится — в центре шарика или вблизи его поверхности?

5. Чтобы разыскать прокол в надувном матрасе, можно для создания давления положить на него стопку книг. Будет ли струйка воздуха из отверстия столь же интенсивной, если эти книги разложить двумя стопками?

6. Почему стук громче, если стучать не в стенку, а в дверь?

7. Как определить диаметр футбольного мяча с помощью деревянной линейки?

8. Налейте в чистую тарелку хорошо прокипяченной воды и набросайте на ее поверхность несколько спичек. Если коснуться воды между спичками кусочком сахара, то они сплываются, если же коснуться мылом — разбегаются в разные стороны. Почему?

9. Развевающийся на здании одноцветный флаг кажется ночью полосатым, если его подсвечивать с определенного направления, причем полосы все время перемещаются. Как это объяснить?

10. Можно ли, не разбирая кофемолки, определить направление вращения ротора ее электродвигателя?

11. Почему в свете фар автомобиля лужа на асфальте ночью кажется водителю темным пятном?

12. Как с помощью сильного магнита определить, постоянным или переменным током питается электролампочка?

13. Если в холодную погоду отлить из термоса часть горячего чая и снова плотно закрыть термос пробкой, то через некоторое время можно обнаружить, что пробка вылетела. Отчего это могло произойти?

Сляпенарский достал из кармана пиджака пачку синей бумаги, ножницы и тюбик с клеем. Он вырезал из бумаги фигурку, до странности напоминавшую бумажную куклу: пять длинных выступов, или отростков, походили на голову, руки и ноги. Затем он сложил фигурку и стал аккуратно склеивать концы отростков. Процедура была весьма деликатная и требовала большой осторожности, выступы весьма хитроумно переплетались. Наконец, осталось только два свободных конца. Сляпенарский капнул клеем на один из них.

— Джентльмены,— сказал он, держа перед собой замысловатое сооружение из синей бумаги и поворачивая его так, чтобы все могли видеть,— сейчас вы увидите первую публичную демонстрацию поверхности Сляпенарского.

С этими словами профессор прижал один из свободных концов к другому.

Раздался громкий хлопок, как будто лопнула электрическая лампа,— и бумажная фигурка исчезла!

На мгновение мы замерли, а потом все как один разразились смехом и аплодисментами.

Разумеется, мы были убеждены, что стали жертвами тонкого розыгрыша. Но нельзя не признать, что исполнено все было великолепно. Как и другие участники банкета, я полагал, что Сляпенарский показал нам остроумный химический фокус, и что бумага была пропитана особым составом, позволяющим поджечь ее трением или каким-то другим способом, после чего она мгновенно сгорела, не оставив и пепла.

Профессор Сляпенарский, казалось, был озадачен дружным смехом, и лицо его приобрело неотличимый от бороды цвет. Он смущенно улыбнулся и сел. Аплодисменты мало-помалу стихли.

Мы все столпились вокруг нашего гостя и наперебой шутливо поздравляли его с замечательным открытием. Старший из официантов напомнил нам, что для тех, кто хотел бы заказать напитки и посмотреть программу варьете, внизу заказаны столики.

Столовая постепенно опустела. В комнате остались только Сляпенарский, Симпсон и ваш покорный слуга. Два знаменитых тополога стояли у доски. Симпсон, широко улыбаясь, указал на один из чертежей:

— Ошибка в вашем доказательстве скрыта необычайно остроумно, профессор. Не знаю, заметил ли ее еще кто-нибудь из присутствующих.

Лицо Сляпенарского было серьезно.

— В моем доказательстве нет никакой ошибки,— заметил он не без раздражения.

— Да полно вам, профессор,— возразил Симпсон,— ошибка вот здесь.

Он коснулся пальцем чертежа:

— Пересечение этих линий не может принадлежать многообразию. Они пересекаются где-то вне многообразия.— Он сделал неопределенный жест вправо.

Лицо Сляпенарского снова покраснело.

— А я говорю вам, что никакой ошибки здесь нет,— повторил он, повысив голос, и медленно, тщательно выговаривая, как бы выстреливая слова, повторил шаг за шагом все доказательство от начала до конца, постукивая для пущей убедительности по доске костяшками пальцев.

Симпсон слушал с мрачным видом и в одном месте прервал Сляпенарского, возразив ему что-то. Сляпенарский мгновенно парировал возражение. Последовало еще одно замечание, но и оно не осталось без ответа. Я не вмешивался в их спор, поскольку он уже давно вышел за рамки моего понимания и воспарил к недоступным мне высям топологии.

Между тем страсти у доски накалялись, оппоненты говорили все громче и громче. Я уже говорил о давнем споре Симпсона со Сляпенарским по поводу нескольких топологических аксиом. О них-то теперь и зашла речь.

— А я говорю вам, что ваше преобразование не взаимно непрерывно и, стало быть, эти два множества не гомеоморфны,— кричал Симпсон.

На висках Сляпенарского вздулись вены.

— Не будете ли вы так любезны объяснить в таком случае, каким образом исчезло мое многообразие? — заорал он в ответ.

— Дешевый трюк, ловкость рук и ничего больше,— презрительно фыркнул Симпсон.— Не знаю, да и знать не хочу, как вы его делаете, но ясно одно: ваше многообразие исчезло не из-за того, что стало нульсторонним.

— Ах, не стало? Не стало? — процедил Сляпенарский сквозь зубы и, прежде чем я успел вмешаться, нанес своим огромным кулаком удар Симпсону в челюсть. Профессор из Висконсина со стоном упал на пол. Сляпенарский обернулся ко мне с грозным видом.

— Не вздумайте вмешиваться, молодой человек,— предупредил он меня. Профессор был тяжелее меня по крайней мере на сотню фунтов, и я, вняв предупреждению, отступил.

О дальнейшем я вспоминаю с ужасом. С налитым кровью глазами Сляпенарский присел рядом с распростертой фигурой своего оппонента и принялся сплетать его руки и ноги в фантастические узлы. Он складывал своего коллегу из Висконсина так же, как полоску бумаги! Раздался взрыв — и в руках у Сляпенарского осталась только груда одежды.

Симпсон обрел нульстороннюю поверхность.

Сляпенарский поднялся, тяжело дыша и судорожно сжимая твидовый пиджак Симпсона. Потом он разжал руки и пиджаком накрыл остатки симпсоновского туалета, лежавшие на полу. Сляпенарский что-то невнятно пробормотал и принялся колотить себя кулаком по голове.

Я сохранил достаточно самообладания, чтобы догадаться запереть дверь. Когда я заговорил, голос мой звучал чуть слышно:

— А его... можно вернуть?

— Не знаю, ничего не знаю,— завопил Сляпенарский.— Я только начал изучать нульсторонние поверхности, только начал. Не знаю, где он может быть. Ясно только одно: Симпсон сейчас находится в пространстве бóльшего числа измерений, чем наше, скорее всего в четномерном пространстве. Бог знает куда его занесло.

Внезапно он схватил меня за лацканы пиджака и тряхнул так сильно, что я подумал, не настала ли теперь моя очередь.

— Я должен найти его,— сказал Сляпенарский.— Это единственное, что я могу сделать.

Он уселся на пол и принялся переплетать самым невероятным образом свои руки и ноги.

— Да не стойте вы, как идиот,— прикрикнул он на меня.— Лучше помогите.

Я кое-как привел в порядок свою одежду и помог ему изогнуть правую руку так, чтобы она прошла под его левой ногой и вокруг шеи. С моей помощью ему удалось дотянуться до уха. Левая рука была изогнута аналогичным способом.

— Сверху, сверху, а не снизу,— раздраженно поправил меня Сляпенарский, когда я пытался помочь ему дотянуться левой рукой до кончика носа.

Раздался еще один взрыв, гораздо более громкий, чем тот, которым сопровождалось исчезновение Симпсона, и лицо мое обдал порыв холодного ветра. Когда я открыл глаза, передо мной на полу высилась еще одна груда одежды.

Я стоял и тупо смотрел на две кучи одежды, как вдруг сзади раздался приглушенный звук, нечто вроде «пффт». Оглянувшись, я увидел Симпсона. Он стоял у стены голый и дрожал. В лице его не было ни кровинки. Затем ноги его подкосились, и он опустился на пол. На его конечностях, там, где они плотно прилегали друг к другу, выступали красные пятна.

Я подкрался к двери, отпер ее и устремился вниз по лестнице: мне настоятельно требовалось подкрепиться. Потом мне рассказали о страшном переполохе в зале: за несколько секунд до моего появления Сляпенарский завершил свой прыжок из другого измерения.

В задней комнате я застал других членов общества «Мебиус» и администрацию клуба «Пурпурные шляпы» за шумным и бестолковым спором. Сляпенарский, завернувшись в скатерть как в тогу, сидел в кресле и прижимал к нижней челюсти носовой платок с кубиками льда.

— Симпсон вернулся,— сообщил я.— Он в обмороке, но думаю, что с ним все в порядке.

— Славу богу,— пробормотал Сляпенарский.

Администратор и владелец «Пурпурных шляп» так и не поняли,что произошло в тот сумбурный вечер, и наши попытки что-либо объяснить лишь усугубляли ситуацию. Прибытие полиции еще больше усилило неразбериху и панику.

Наконец, нам удалось одеть пострадавших коллег, поставить их на ноги, и мы покинули поле брани, пообещав вернуться назавтра с нашими адвокатами. Управляющий, по-видимому, считал, что его клуб пал жертвой заговора каких-то иностранцев, и грозился взыскать с нас компенсацию за ущерб, нанесенный, по его словам, «безупречной репутации клуба». Оказалось, что таинственное происшествие, слух о котором разнесся по городу, послужило клубу отличной рекламой, и «Пурпурные шляпы» отказались от иска.

Симпсон отделался легко, но у Сляпенарского оказался перелом челюсти. Я отвез его в госпиталь Биллингс, что неподалеку от университета. Несколько недель он пробыл в госпитале, запретив пускать к себе посетителей, и я увидел его только в день выписки, когда проводил его на вокзал. Сляпенарский уехал в Нью-Йорк, и с тех пор я его не видел. Через несколько месяцев он скончался от сердечного приступа. Профессор Симпсон вступил в переписку с вдовой профессора Сляпенарского в надежде разыскать хотя бы черновики работ своего покойного коллеги по теории нульсторонних поверхностей.

Сумеют ли топологи разобраться в черновиках Сляпенарского (разумеется, если их удастся найти), покажет будущее. Мы извели массу бумаги, но пока что нам удавалось построить только обычные двусторонние и односторонние поверхности. Хоть я и помогал Сляпенарскому «складываться» в нульстороннюю поверхность, чрезмерное волнение стерло из моей памяти все детали. Но я никогда не забуду замечание, которое обронил великий тополог в тот памятный вечер перед моим уходом.

— Счастье,— сказал он,— что Симпсон и я успели перед возвращением освободить правую руку.

— А что могло бы случиться? — спросил я недоумевающе.

Сляпенарский поежился.

— Мы бы вывернулись наизнанку,— сказал он.

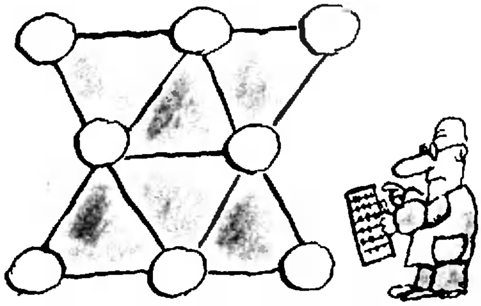
Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

М. Столяр (Киев) **74, 80—82**; *Д. Сторожук* (Киев) **74, 75**; *М. Субботин* (Старый Оскол) **83**; *А. Супруненко* (Киев) **74**; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) **77, 87**; *Д. Тейтельман* (Минск) **75**; *В. Тенависиров* (Русе, НРБ) **77**; *С. Титов* (Старый Оскол) **81**; *И. Тодощенко* (Пермь) **74, 75, 77, 79—81, 87**; *Д. Толкачев* (Ногинск) **85, 87**; *Ю. Уваров* (Ленинград) **74, 77, 87**; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) **74, 75, 87**; *Е. Ушакова* (Старый Оскол) **83**; *В. Федотов* (Москва) **77, 80, 81**; *Г. Фейгин* (Тула) **74, 75, 77, 82, 83, 87**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 77, 79, 82, 83, 87**; *С. Фираго* (Шклов) **74**; *И. Химони* (Днепропетровск) **74, 75, 79, 82, 87**; *О. Хорошилова* (Старый Оскол) **83**; *О. Цодиков* (Артемовск Донецкой обл.) **87**; *И. Чайка* (Кузнецовск) **74, 75, 77, 82**; *О. Чанов* (Брест) **74, 75, 81, 82, 85, 87**; *О. Черных* (Старый Оскол) **81—83**; *В. Чуев* (Старый Оскол) **77**; *В. Шварцман* (Брест) **75**; *О. Шведов* (Москва) **74, 75, 77, 81, 83, 85, 87**; *С. Шинкевич* (Березники) **74, 75, 77, 79—83, 87**; *О. Шиховцев* (Верхняя Салда) **80—82**; *С. Штовба* (Винница) **74**; *И. Ягольницер* (Черновцы) **75**; *В. Янкевич* (Витебск) **77, 83**; *И. Ясников* (Тольятти) **75, 77, 81**.

„Квант" для младших школьников

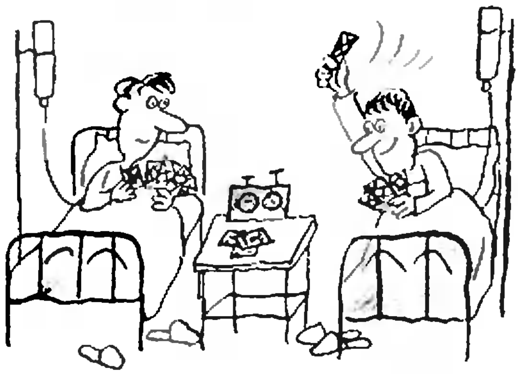
Задачи



1. Числа от 1 до 8 расставьте в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма трех чисел в вершинах каждого зеленого треугольника равнялась 13, а в вершинах каждого коричневого треугольника равнялась 14.

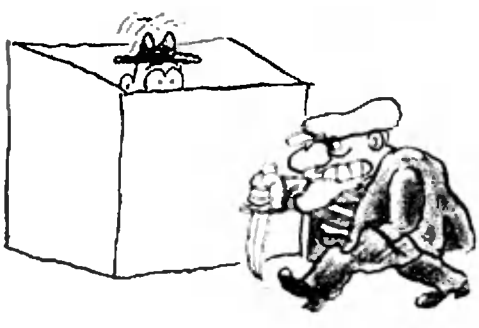
2. Решите числовой ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, разным — разные.

3. В шахматном турнире Женя и Саша сыграли одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Остальные участники турнира доиграли до конца. Всего в турнире было сыграно 23 партии. Играли ли Женя и Саша в турнире между собой?

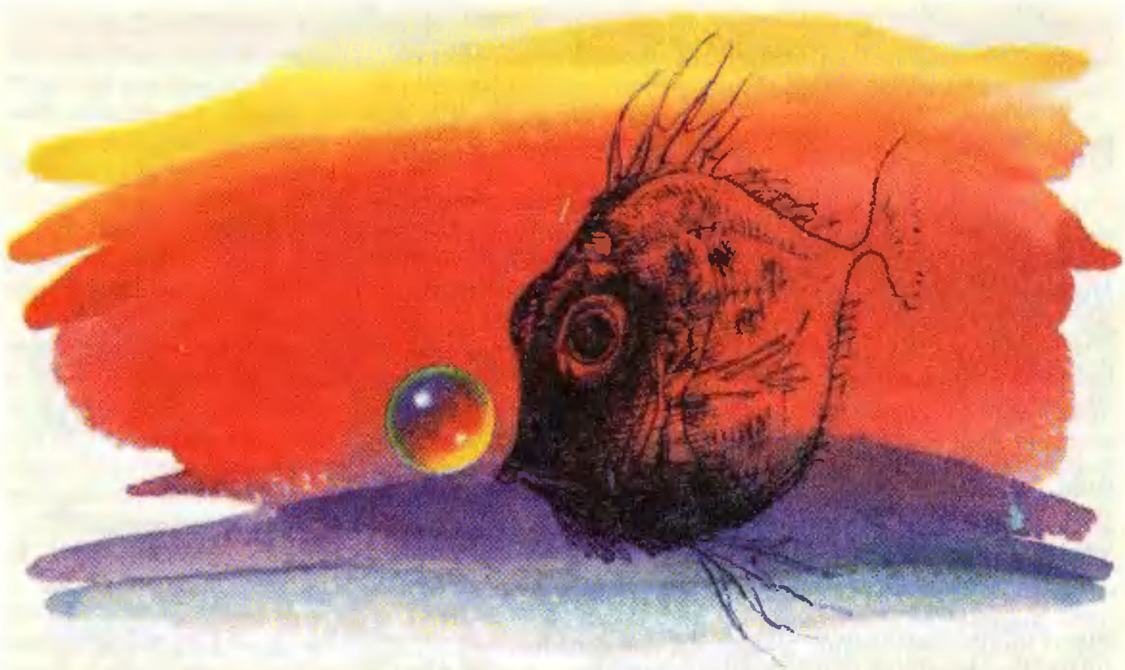


4. ЭВМ напечатала два числа: 2^{1987} и 5^{1987}. Сколько цифр она при этом напечатала?

5. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты площадью 1. Разрежьте коробку на три куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат площадью 5.



Эти задачи нам предложили: *Н. И. Авилов, ученица 6 класса из г. Ленинграда Н. Яковлева, ученик 10 класса из г. Гагарина В. Близнеков, ученик 10 класса из г. Харькова В. Пушня, В. В. Произволов.*



Лаборатория „Кванта"

Наверное, каждый из вас хотя бы однажды любовался радугой — этим красивым и загадочным природным явлением.
А как образуется радуга? Когда и как ее можно увидеть? Какова теория этого явления? Можно ли экспериментально исследовать радугу? Как получить искусственную радугу? Ответы на эти вопросы вы сможете найти, прочитав публикуемые ниже две статьи.

Кто творит радугу?

Доктор физико-математических наук
Я. Е. ГЕГУЗИН

Радугу творят водяные капли: в небе — дождинки, на поливаемом асфальте — капельки, брызги от водяной струи. Радугу могут сотворить и капли-росинки, которыми осенним утром покрыта низко скошенная трава.

Вначале поговорим о «геометрии» радуги, т. е. о форме и расположении разноцветных дуг, а затем — о «физике» радуги, о том, какие физические законы определяют ее форму и цвета.

«Геометрия» радуги в небе описана давным-давно. Обычно в небе видны две разноцветные концентрические дуги — одна яркая, а другая побледнее. Каждая дуга является частью окружности, центр которой лежит на прямой, проведенной через солнце и глаз наблюдателя. Эта прямая — своеобразная ось, и вокруг нее изогнута радуга. Глаз наблюдателя оказывается в вершине конусов, в основании которых — разноцветные дуги (рис. 1). Образующие этих конусов с осью соответственно составляют углы 42 и 51°. Солнце светит из-за спины наблюдателя, и чем ниже оно опускается к горизонту, тем выше поднимается вершина радуги. В тот момент, когда солнце касается горизонта, можно увидеть полукруглую радугу — большей она никогда не бывает. Если же солнце поднимется над горизонтом более чем на 42°, вершина яркой радуги уйдет за горизонт.

Эта статья — глава из книги «Капля» известного популяризатора физики Я. Е. Гегузина (М.: Наука, 1973).

Все происходит так, будто негнущиеся прямые, как коромысло, закреплены в точке *O*, где находится глаз наблюдателя, а на концах коромысла — солнце и вершина радуги. Это означает, что у каждого наблюдателя «своя» радуга, изогнутая вокруг «своей» оси, той самой, которая проходит через его глаз... И еще: дойти до радуги, как и до горизонта, невозможно. И приблизиться к ней тоже невозможно, потому что это означало бы изменение всей геометрии радуги, в частности угла при вершине конуса. А его соблюдение — первейшее требование и физики и геометрии радуги.

К геометрическим сведениям следует отнести данные о порядке чередования цветов в радугах. Как известно, в радуге представлены «все цвета радуги» — от красного до фиолетового. Порядок цветов в дугах обратный, и друг к другу они обращены красными полосами. Вот и вся геометрия радуги, во всяком случае той, которая сотворена каплями в небе.

Теперь о физике радуги. Ее история восходит к 1637 году, когда французский философ и естествоиспытатель Рене Декарт впервые понял роль капли в возникновении радуги. Свое открытие он подтвердил расчетом, потребовавшим затраты огромного труда: он проследил путь в сферической капле десяти тысяч параллельных солнечных лучей. Первый из них касается поверхности капли, а десятитысячный проходит через ее центр, т. е. расстояние между крайними лучами равно радиусу капли.

Идея Декарта была проста и естественна. Он считал, что солнечные лучи, двукратно преломляясь в капле и один раз отражаясь от ее поверхности, могут попасть в глаз наблюдателя (рис. 2). Проследив такой путь десяти тысяч лучей, он убедился, что все лучи, номера которых приблизительно находятся между 8500 и 8600, будут из капли выходить практически в одном и том же направлении, под углом 42° к оси радуги. Следовательно, среди прочих это направление выделено своей яркостью, и стократно усиленный луч воспримется наблюдателем...

Все рассказанное о десяти тысячах лучей касается главной радуги, той, к которой относится цифра 42°. Если же мы рассмотрим более сложный путь лучей в капле — два преломления при двух, а не одном отражении — получим объяснение второй дуги, к которой относится цифра 51°.

...Появление цветов — естественное следствие зависимости показателя преломления от длины волны света. В капле происходит то же, что в стеклянной призме, которая разлагает белый свет на «все цвета радуги». «Физика» радуги остается неизменной при различных «геометриях» — для радуги на мокром асфальте и на скошенной траве, покрытой росой.

Еще следует упомянуть об эффектах, связанных с малостью размера капель. Те капли, которые в основном творят радугу, имеют диаметр 0,08—0,20 мм. При таких размерах надо учитывать, что свет имеет волновую природу. Однако связанные с этим изменения элементарной теории Декарта, который рассматривает луч, а не волну, оказываются не очень существенными.

Если бы создающие радугу капли сохранялись в небе, не изменяясь, радугу можно было бы наблюдать в течение не более 2 ч 48 мин: именно за это время солнце по небосводу проходит дуговой путь в 42°. Но каплям в небе не свойственно долголетие — они испаряются, соединяются и, уве-

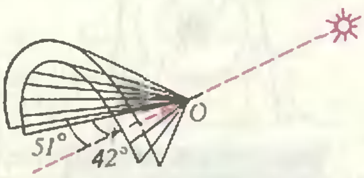


Рис. 1.

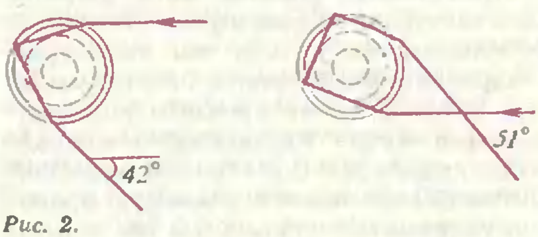


Рис. 2.

личивая свой размер, опадают. Все это отражается на радуге — на яркости ее цвета, ширине соответствующих световых полос, продолжительности ее жизни. Когда капель становится мало, радуга блекнет и исчезает.

Искусственная радуга

В. В. МАЙЕР, Р. В. МАЙЕР

Одно дело теория радуги или случайные наблюдения этого природного явления и совсем другое — его экспериментальное исследование. Но для этого нужно прежде всего получить радугу искусственно.

Искусственные радуги известны давно. В одном из опытов наполненную водой круглую колбу сквозь отверстие в экране освещают параллельным пучком света и наблюдают возникающую на экране цветную каемку. Главный недостаток этого опыта заключается в том, что он не совсем отражает реальное положение вещей: настоящая радуга получается не от одной капли, а от огромного количества капель. Можно сделать и по-другому: с помощью пульверизатора или небольшого фонтана создать облако падающих в воздухе капель и на них наблюдать радугу. Условия такого опыта вполне соответствуют природным, однако получить требуемое облако совсем не просто, да и экспериментировать с ним не слишком приятно.

Мы же предлагаем вам еще один опыт и надеемся, что вы его обязательно проведете.

Приготовьте ровный лист дюраля или жести размером примерно 200×200 мм, свечу, воду или глицерин, микроэлектродвигатель, батарейку на 4,5 В, грифель от простого карандаша или кусок нихромового проводника диаметром 0,2—0,3 мм и длиной 200—400 мм, ластик, стальную проволоку диаметром около 0,3 мм и длиной 100 мм (такую проволоку можно получить, растянув подходящую пружинку), жестяную или полиэтиленовую крышку для банки. Оказывается, используя перечисленные предметы, можно получить устойчивое множество примерно одинаковых капель, пригодное для наблюдения и исследования радуги.

Основная идея заключается в следующем: если прозрачную жидкость распылить на несмачивающуюся ею поверхность, то под действием сил поверхностного натяжения капельки превращаются в прозрачные шарики. А это как раз то, что нужно для создания радуги. А теперь — за дело.

Металлическую пластинку вымойте с мылом и высушите. Перемещая ее над пламенем свечи, равномерно нанесите на поверхность пластинки слой копоти. Вода и глицерин не смачивают копоть, но, если влажность воздуха велика, копоть может отслоиться от пластинки и как бы «промокнуть». Чтобы исключить это нежелательное явление, пластинку нужно предварительно покрыть тонким слоем клея «Момент», нитролака или нитрокраски и после высыхания этого слоя нанести копоть.

Глицерин в опытах предпочтительнее воды, потому что он испаряется значительно медленнее. Даже в жаркую погоду «глицериновую радугу» вы сможете наблюдать несколько суток, а от «водяной» уже через час не останется и следа.

Для нанесения капель жидкости на закопченную поверхность необходим распылитель. К сожалению, обычный пульверизатор для этого не годится. Дело в том, что он выдает капли, размеры которых колеблются

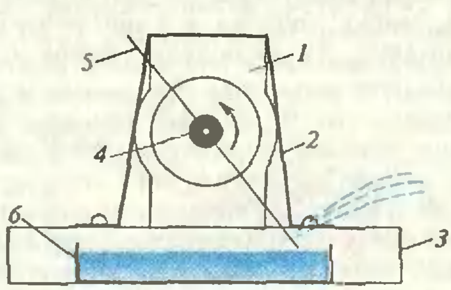


Рис. 1.

в довольно широких пределах, а на таких каплях радуга получается размазанной, не контрастной. Хорошие же радуги дают примерно одинаковые капли диаметром от 0,3 до 1 мм.

Одна из возможных конструкций генератора капель показана на рисунке 1. Микроэлектродвигатель *1* жестяной обжимкой *2* и двумя болтами закреплен на основании *3*. На вал двигателя насажен кусок ластика *4*, сквозь который пропущена стальная проволока *5*. Концы проволоки при вращении вала попеременно погружаются в жидкость, налитую в неглубокую баночку (крышку) *6*, и, покидая ее, разбрызгивают капли. Понятно, что диаметр капель определяется диаметром проволоки, глубиной погружения в жидкость и скоростью ее вращения. Чтобы можно было изменять эту скорость, микроэлектродвигатель подключите к батарейке через импровизированный реостат, состоящий из грифеля или куска нихромового проводника. Капли, срывающиеся с концов вращающейся проволоки, летят не только в направлении, показанном на рисунке, но и в другие стороны, поэтому сзади и с боков генератор капель нужно оградить П-образным защитным экраном из картона. Положив перед открытой частью экрана лист черной бумаги, отрегулируйте скорость вращения брызгающей проволоки (она должна составлять не более нескольких оборотов в секунду) и определите место преимущественного падения капель. Введите туда закопченную металлическую пластинку и, перемещая ее, добейтесь по возможности равномерного

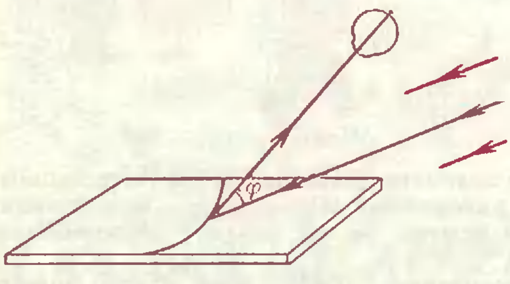


Рис. 2.

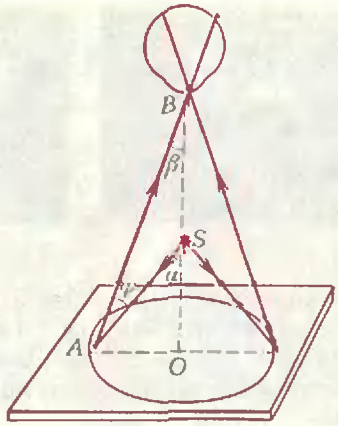


Рис. 3.

покрытия пластинки каплями. Плотность капельного слоя должна быть настолько большой, чтобы в рассеянном отраженном свете поверхность пластинки казалась состоящей сплошь из блестящих капелек.

Для наблюдения радуги достаточно пластинку с каплями подставить под прямые лучи и подобрать необходимый угол φ между этими лучами и направлением наблюдения (рис. 2; радуга схематически показана кривой линией). Как следует из теории радуги, этот угол для воды должен быть равен $\varphi_в = 42°$, а для глицерина — $\varphi_г = 27°$.

Если все сделано достаточно хорошо, вы увидите прекрасную яркую радугу и, может быть, рядом с ней — вторую, значительно более слабую. Явление настолько впечатляющее, что, чтобы увидеть его, право, стоит потрудиться.

В природе радуга обычно представляет собой часть окружности (если исключить радугу на росе и ту, которую при особом везении можно увидеть с самолета). Вам же ничто не мешает наблюдать полную радугу (полную окружность). Для этого на расстоянии 5—8 см от пластинки с каплями закрепите лампочку для карманного фонаря. При наблюдении сверху вы заметите слабо освещенный круг с разноцветной границей, которая и является радугой (рис. 3; радуга схематически показана окружностью). Закрывая поочередно один глаз, а затем другом, вы обнаружите, что радуга несколько смещается от-

Рис. 4.

носительно пластинки. Вот почему при наблюдении двумя глазами сразу радуга кажется не лежащей на пластинке с каплями, а парящей над ней.

К сожалению, мы не сумели получить цветные фотографии искусственной радуги. На рисунке 4 приведены черно-белые снимки, раскрашенные карандашами. Они лишь иллюстрируют результаты наблюдений при разных условиях, но ни в коей мере не передают всей красоты явления. На переднем плане этих фотографий видна закрепленная в держателе лампочка. Если на пластинку с каплями смотреть почти сверху, то наблюдается полная радуга в виде эллипса (рис. 4, *а*); при смещении глаза вниз и вбок радуга становится похожей на параболу (рис. 4, *б*) и гиперболу (рис. 4, *в*).

Вопросы для самостоятельной работы

1. Похожа ли созданная вами радуга на ту, которая иногда наблюдается на росе? Соответствует ли последовательность цветов в искусственной радуге той, которая имеет место в естественной?

2. Пользуясь схемой наблюдения, представленной на рисунке 3, измерьте расстояния OA, OS, OB, вычислите углы α и β и определите угол φ, под которым наблюдается радуга на водяных и глицериновых каплях. Подтверждают ли ваши измерения теоретические расчеты?

3. Объясните, почему в ваших опытах внутри радуги получается освещенная белая область (см. рис. 4), а в природе такая область не наблюдается.

4. Поместив перед глазом поляроидную пленку, на полной радуге вы заметите две диаметрально противоположные темные полосы, которые поворачиваются вместе с вращением поляроида. Какова причина этого явления?

5. Экспериментально покажите, что чем меньше диаметр капель, тем слабее красный цвет радуги, заметнее фиолетовый и в целом радуга становится более белесой.

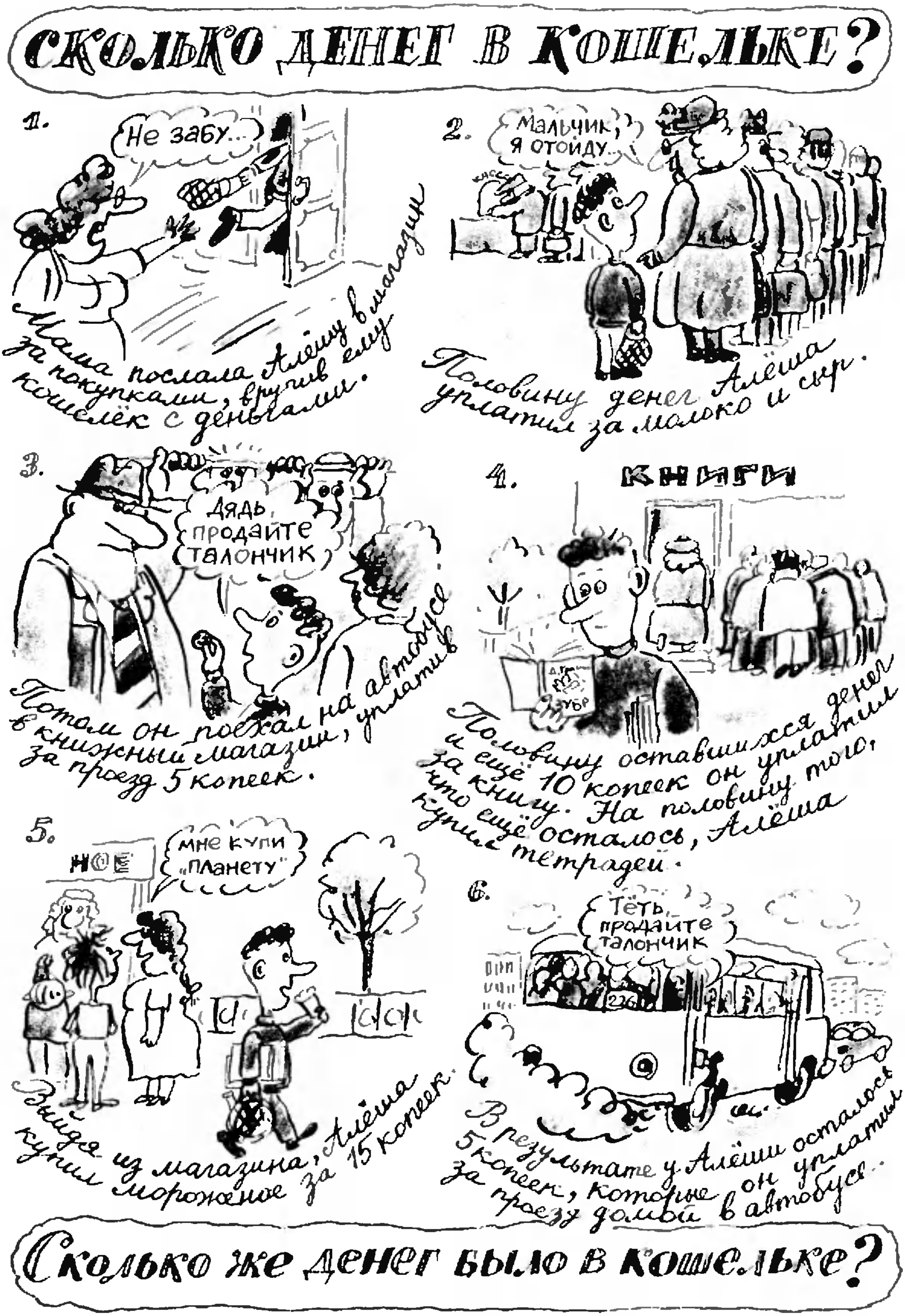
И в заключение — рекомендуемая литература:

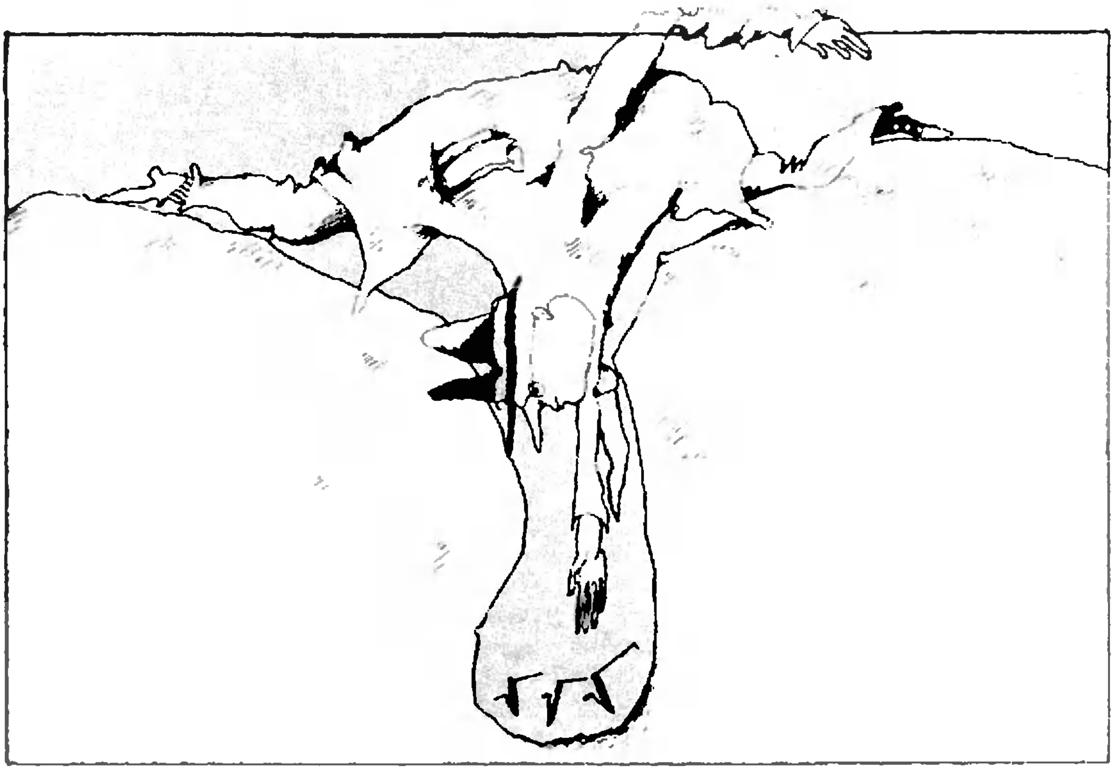
1. И. К. Белкин. Что такое радуга? — «Квант», 1984, № 12, с. 20.

2. Я. Е. Гегузин. Капля.— М.: Наука, 1973.

3. М. Миннарт. Свет и цвет в природе.— М.: Наука, 1969.

4. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. Беседы о преломлении света.— М.: Наука, серия «Библиотечка «Квант», выпуск 18, 1982.


СКОЛЬКО ДЕНЕГ В КОШЕЛЬКЕ?
1.
Не забу...
Мама послала Алёшу в магазин за покупками, вручив ему кошелёк с деньгами.
2.
Мальчик, я отойду...
Половину денег Алёша уплатил за молоко и сыр.
3.
Дядь, продайте талончик
Потом он поехал на автобусе в книжный магазин, уплатив за проезд 5 копеек.
4.
КНИГИ
Половину оставшихся денег и ещё 10 копеек он уплатил за книгу. На половину того, что ещё осталось, Алёша купил тетрадей.
5.
Мне купи „Планету“
Выйдя из магазина, Алёша купил мороженое за 15 копеек.
6.
Тёть, продайте талончик
В результате у Алёши осталось 5 копеек, которые он уплатил за проезд домой в автобусе.
Сколько же денег было в кошельке?



Математический кружок

Три формулы Рамануджана

Кандидат физико-математических наук
В. С. ШЕВЕЛЕВ

В формулах Рамануджана всегда содержится гораздо больше, чем это кажется на первый взгляд...

Харди

В этой статье речь пойдет о трех замечательных формулах Рамануджана*), каждая из которых содержит в левой части три кубических корня:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}, \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}, \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}. \qquad (3)$$

Эти формулы трудно спутать с формулами какого-либо другого математика: они напоминают загадочное жонглирование с числами.

Первая формула более проста и доказывается последовательным возведением в куб. Для нас, кроме эстетического восприятия, она интересна тем, что в структурном отношении очень похожа на две следующие. Что же касается формул (2) и (3), то здесь далеко не все так просто. Приведем интересные цитаты об этих формулах из брошюры В. И. Левина**): «Эти формулы совсем элементарны, но очень глубоки. Они обладают неповторимой внутренней симметрией, и догадаться об их существовании

*) О жизни и творчестве этого уникального математика вы можете причитать в «Кванте» № 10 за 1987 год.

**) Левин В. И. *Рамануджан*.— М.: Знание, 1968.

мог только математик самого высокого ранга». И еще: «Эти точные равенства являются, конечно, частными случаями значительно более общих соотношений, которыми располагал Рамануджан, но о которых он никому ничего не сообщил...»

Мы приглашаем читателя проследить за доказательством формул (2) и (3). В некоторых местах ему понадобятся карандаш и бумага. В награду он поймет внутренний механизм, управляющий этими красивыми формулами и, по-видимому, сможет, уже самостоятельно, доказать несколько формул типа формул Рамануджана (найденных автором,— см. упражнение 5), а возможно, и придумать свои.

Связь с формулами Виета

Связь между тригонометрией и алгеброй легко угадывается в формулах Рамануджана. Вглядимся пристальнее в числа

$$\left\{\cos\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{8\pi}{7}\right\},$$
$$\left\{\cos\frac{2\pi}{9},\ \cos\frac{4\pi}{9},\ \cos\frac{8\pi}{9}\right\}.$$

Прежде всего бросается в глаза, что аргументы косинусов составляют в обеих тройках геометрические прогрессии со знаменателей 2.

Воспользовавшись преобразованием

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\frac{\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin4\alpha\cos4\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{\sin8\alpha}{8\sin\alpha},$$

можно установить такие равенства:

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8},$$
$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{8}.$$

Это — наш первый успех, показывающий, что аргументы косинусов в формулах Рамануджана выбраны отнюдь не случайно.

Попробуем найти теперь суммы трех косинусов. Имеем:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\right.$$
$$\left.-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=$$
$$=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}=$$
$$=2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}=0.$$

Наконец, поищем такие суммы:

$$S_1=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+$$
$$+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7},$$

$$S_2=\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+$$
$$+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}.$$

Упражнение 1. Докажите, что $S_1=-\frac{1}{2}$, $S_2=-\frac{3}{4}$.

Напишем теперь формулы Виета для кубического уравнения. Если x, y, z — корни уравнения

$$t^3+pt^2+qt+r=0,$$

то, как известно,

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=-p,\\ xy+xz+yz=q,\\ xyz=-r.\end{array}\right. \qquad (4)$$

Сравнивая (4) с равенствами, которые мы получили выше для рамануджановских троек косинусов, заключаем, что первая тройка состоит из корней уравнения

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}=0, \qquad (5)$$

а вторая — из корней уравнения

$$t^3-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}=0. \qquad (6)$$

Этот этап — самый важный в нашем доказательстве. Он показывает, какова природа связи между тригонометрическими и алгебраическими выражениями в формулах (2) и (3).

Рассмотрим сумму трех корней...

Поставим теперь задачу так. Дано уравнение

$$t^3+pt^2+qt+r=0,$$

корнями которого являются числа x, y, z. Требуется найти сумму их кубических корней (куб этой суммы обозначим через A):

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{A}. \qquad (7)$$

Оказывается, сумму (7) легче искать вместе с другой суммой:

$$\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{xz}+\sqrt[3]{yz}=\sqrt[3]{B}. \qquad (8)$$

Возводя в куб обе части (7), а затем (8) и учитывая формулы Виета (4), получаем (проверьте это самостоятельно):

$$A=-p+3\sqrt[3]{AB}+3\sqrt[3]{r}, \qquad (9)$$

$$B=q-3\sqrt[3]{ABr}-3\sqrt[3]{r^2}, \qquad (10)$$

Умножая (9) на $\sqrt[3]{r}$ и складывая с (10), выражаем B через A:

$$B=q-(A+p)\sqrt[3]{r}.$$

Подставляя это в (9), получаем уравнение только относительно A:

$$A+p-3\sqrt[3]{r}=3\sqrt[3]{A(q-(A+p)\sqrt[3]{r})}.$$

Наконец, возводя обе части уравнения в куб, получаем следующее кубическое уравнение относительно A:

$$A^3+3(p+6\sqrt[3]{r})A^2+ +3(p^2+3p\sqrt[3]{r}+9\sqrt[3]{r^2}-9q)A+ +(p-3\sqrt[3]{r})^3=0. \qquad (11)$$

Упрощение кубического уравнения

Пусть дано кубическое уравнение

$$x^3+3bx^2+3cx+d=0. \qquad (12)$$

Покажем, как — в некоторых случаях особенно успешно — оно может быть упрощено.

Подставляя в (12) $x=z-b$, получим кубическое уравнение относительно z, не содержащее z^2 (проверьте!). Более того, если b и c в уравнении (12) связаны соотношением

$$b^2=c,$$

то в уравнении относительно z исчезнет и член с z^1. В результате уравнение (12) примет вид

$$z^3=b^3-d.$$

Возвращаясь к x, получим

$$x=\sqrt[3]{b^3-d}-b. \qquad (13)$$

Проверим, в каком случае выполняется условие $b^2=c$ для уравнения (11). Сравнивая его с (12), имеем:

$$b=p+6\sqrt[3]{r},$$
$$c=p^2+3p\sqrt[3]{r}+9\sqrt[3]{r^2}-9q,$$

и условие $b^2=c$ принимает вид:

$$3\sqrt[3]{r^2}+p\sqrt[3]{r}+q=0. \qquad (14)$$

Теперь наступает волнующий момент: ведь числа p, q и r известны для уравнений, корнями которых являются рамануджановские тройки косинусов (см. формулы (5) и (6))!

Для первой тройки: $p=1/2$, $q=-1/2$, $r=-1/8$; для второй тройки: $p=0$, $q=-3/4$, $r=1/8$. Подставляя эти значения в (14), получаем числовые равенства! Но в этом случае, согласно (13) (при $x=A$, $b=p+6\sqrt[3]{r}$, $d=(p-3\sqrt[3]{r})^3$),

$$A=\sqrt[3]{b^3-d}-b.$$

В случае первой тройки $b=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$, $d=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^3=8$, так что

$$A=\frac{-\sqrt[3]{189}+5}{2}=\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}.$$

В случае второй тройки $b=3$, $d=\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{8}$ и

$$A=\sqrt[3]{27+\frac{27}{8}}-3=\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}.$$

Но это как раз подкоренные выражения правых частей формул Рамануджана (2) и (3). Следовательно, доказательство завершено.

Упражнение 2. Положив $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, $\sqrt[3]{z}=w$, докажите, что условие (14) при u, v, w, не равных 0, эквивалентно условию

$$u^3+v^3+w^3+\frac{(uv)^2}{w}+\frac{(uw)^2}{v}+\frac{(vw)^2}{u}+ +3uvw=0. \qquad (15)$$

Из нашего доказательства следует, что условию (15) удовлетворяют кубические корни рамануджановских косинусов (первой и второй тройки). Непосредственно легко проверить, что ему удовлетворяет также тройка чисел

$$u=\sqrt[3]{\frac{1}{9}},\quad v=-\sqrt[3]{\frac{2}{9}},\quad w=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Таким образом, в основе равенств (1), (2), (3) лежит общее условие (15).

Возможно, Рамануджан знал и другие тройки чисел (u, v, w), удовлетворяющие условию (15).

Упражнение 3. Покажите, что вместе с числами u, v, w условию (15) удовлетворяют: а) числа $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$; б) числа $\sqrt[3]{u^3+uvw}$, $\sqrt[3]{v^3+uvw}$, $\sqrt[3]{w^3+uvw}$.

Упражнение 4. Докажите, что если выполнено условие (15), то справедливо равенство

$$\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+\frac{u}{w}+\frac{w}{u}+\frac{v}{w}+\frac{w}{v}\right)^3+$$
$$+6=\left(\frac{u}{v}\right)^3+\left(\frac{v}{u}\right)^3+\left(\frac{u}{w}\right)^3+\left(\frac{w}{u}\right)^3+$$
$$+\left(\frac{v}{w}\right)^3+\left(\frac{w}{v}\right)^3.$$

Проверьте, например, (16) для тройки чисел $u=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $v=-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$, $w=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$. Можно ли, наоборот, вывести (15) из (16)?

Упражнение 5. Докажите равенства:

1°. $\sqrt[3]{\sec\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sec\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sec\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{8-6\sqrt[3]{7}}$;

2°. $\sqrt[3]{\sec\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\sec\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\sec\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$;

3°. $\sqrt[3]{2+\sec\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2+\sec\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2+\sec\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{6\sqrt[3]{7}-10}$;

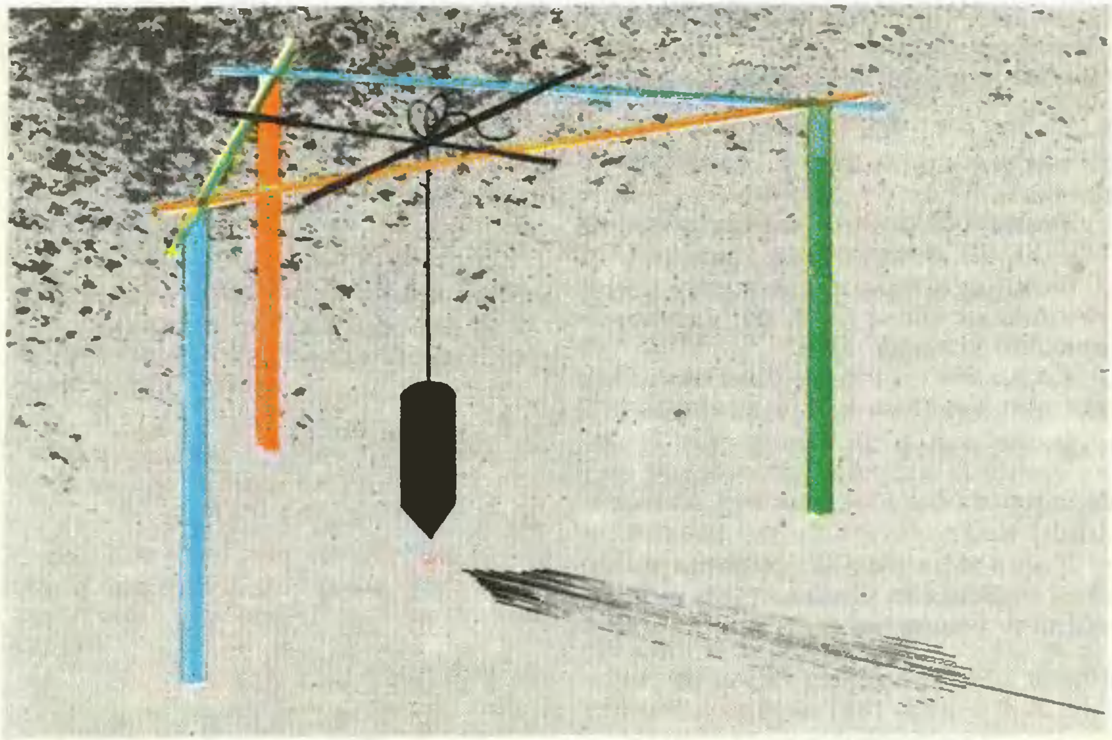
4°. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{7}-2}$;

5°. $\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cos\frac{4\pi}{7}+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{8\pi}{7}}{2\cos\frac{8\pi}{7}+1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{7}-2}$;

6°. $\sqrt[3]{2-\sec\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{2-\sec\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{2-\sec\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-2)}$;

7°. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)}$;

8°. $\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cos\frac{4\pi}{9}-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}}{2\cos\frac{8\pi}{9}-1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)}$.



Искусство программирования

Школьная ЭВМ рисует окружность

А. Г. ЩЕГОЛЕВ

В предыдущем номере «Кванта» мы немного рассказали о графических возможностях школьной ЭВМ «Ямаха» (и языка MSX — Бейсик), нарисовали красивые картинки — вернее, составили алгоритмы, выполняющие эти рисунки. В этот раз мы продемонстрируем графические возможности машины при решении *геометрических задач на построение*. Мы ограничимся разбором лишь одной задачи, но разбор этот будет очень подробным; он основан на принципах *систематического программирования* (см. «Квант», 1987, № 10, 11). Итак, задача: *проведите окружность через три точки, заданные своими координатами.*

В сущности, это хорошо известная вам задача о построении окружности, описанной около треугольника. Такое построение выполнимо, причем единственным образом, если данные три точки различны и не лежат на одной прямой.

Проведем полное систематическое построение алгоритма и программы.

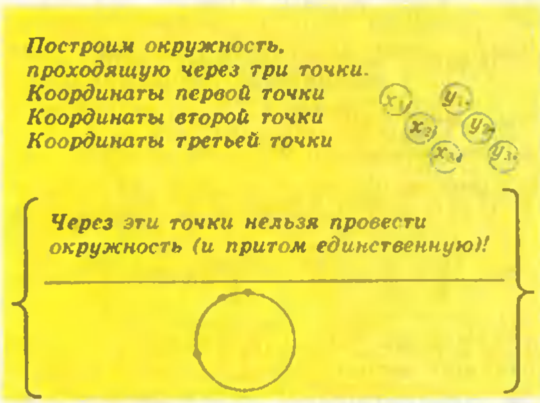


Рис. 1.

Постановка:

Дано: (x_1, y_1) — координаты точек A, B, C.

Треб: σ — изображение окружности (или ее части, находящейся в пределах экрана).

При: A, B, C не лежат на одной прямой.

Связь: $A \in \sigma$, $B \in \sigma$, $C \in \sigma$.

Сценарий:

На рисунке 1 в синие кружочки сведены переменные элементы будущего диалога — конкретные числа, сообщаемые человеком в ответ на запрос ЭВМ. В фигурные скобки заключены два варианта реакции ЭВМ: первый будет выдан в случае, если точки с данными координатами лежат на одной прямой, второй — если координаты точек удовлетворяют постановке; в этом последнем случае на экране будут изображены точки A, B, C с заданными координатами и проходящая через них окружность.

Метод:

Условие того, что три данные точки A, B и C лежат на одной прямой, равносильно коллинеарности векторов

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 2) и имеет вид

$$(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(y_2-y_1)(x_3-x_2).$$

Упражнение 1. *Убедитесь в том, что это условие охватывает и случаи, когда любые две (и даже все три) точки совпадают.*

Для того чтобы изобразить окружность, мы должны сообщить исполнителю (школьной ЭВМ) координаты ее центра и радиус.

Как известно, центр S описанной окружности может быть найден как точка пересечения серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника (AB и BC на рисунке 3).

Координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,\ y_3-y_2);$$

M — середина стороны AB — имеет координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right);$$

координаты точки N — середины

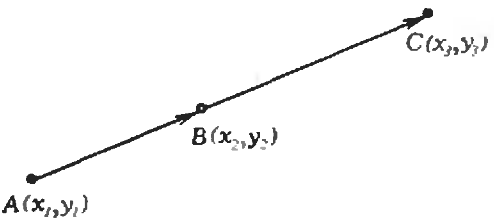


Рис. 2.

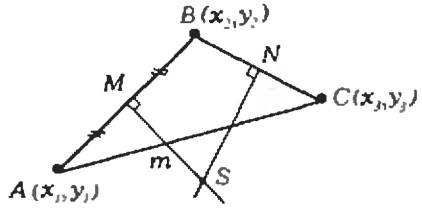


Рис. 3.

стороны BC —

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Любая точка, лежащая на прямой MS, имеет координаты $(M_x+\lambda m_x, M_y+\lambda m_y)$, где M_x и M_y — соответственно абсцисса и ордината точки M; $m_x=y_2-y_1$ и $m_y=x_2-x_1$ — координаты вектора $\vec{m}$; λ — некоторое число.

Упражнение 2. *Докажите, что* $\vec{m} \perp \overrightarrow{AB}$.

Координаты точек на прямой NS выражаются аналогично через параметр μ, координаты точки N и вектора, перпендикулярного к $\overrightarrow{BC}$ (например вектора $\vec{n}=(y_3-y_2, x_2-x_3)$). Для нахождения точки пересечения прямых MS и NS приравняем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} M_x+\lambda m_x=N_x+\mu n_x, \\ M_y+\lambda m_y=N_y+\mu n_y. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно неизвестных λ и μ, получим, например, выражение для λ:

$$\lambda=\frac{1}{2}\,\frac{(y_3-y_2)(y_3-y_1)-(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_2)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)}.$$

Координаты центра окружности

$$S_x=M_x+\lambda m_x=\frac{x_1+x_2}{2}+\lambda(y_2-y_1),$$

$$S_y=M_y+\lambda m_y=\frac{y_1+y_2}{2}+\lambda(x_1-x_2).$$

Радиус отыщется по теореме Пифагора как расстояние между центром и любой из данных точек (например A):

$$r=\sqrt{(S_x-x_1)^2+(S_y-y_1)^2}\,.$$

Теперь, располагая сценарием и методом вычислений, построим алгоритм и переведем его на MSX — BASIC. Используем вспомогательный алгоритм «изображение» (GOSUB 200 — это обращение к соответствующей подпрограмме).

Алгоритм:

<u>алг</u> окружность
<u>нач</u>
<u>вывод</u> «Построим окружность,» «проходящую через три точки.»
<u>запрос</u> «Координаты первой точки»; x_1, y_1
<u>запрос</u> «Координаты второй точки»; x_2, y_2
<u>запрос</u> «Координаты третьей точки»; x_3, y_3

<u>если</u> $(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(y_2-y_1)(x_3-x_2)$
<u>то</u> <u>вывод</u> «Через эти точки нельзя» «провести окружность» «(и притом единственную)!»
<u>иначе</u> изображение
<u>все</u>
<u>кон</u>

<u>алг</u> изображение
<u>нач</u>
<u>графика</u>
точка (x_1, y_1), розовый
точка (x_2, y_2), розовый
точка (x_3, y_3), розовый

$$\lambda:=\frac{1}{2}\,\frac{(y_3-y_2)(y_3-y_1)-(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_2)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)}$$

$$S_x:=\frac{x_1+x_2}{2}+\lambda(y_2-y_1)$$

$$S_y:=\frac{y_1+y_2}{2}+\lambda(x_1-x_2)$$

$$r:=\sqrt{(S_x-x_1)^2+(S_y-y_1)^2}$$

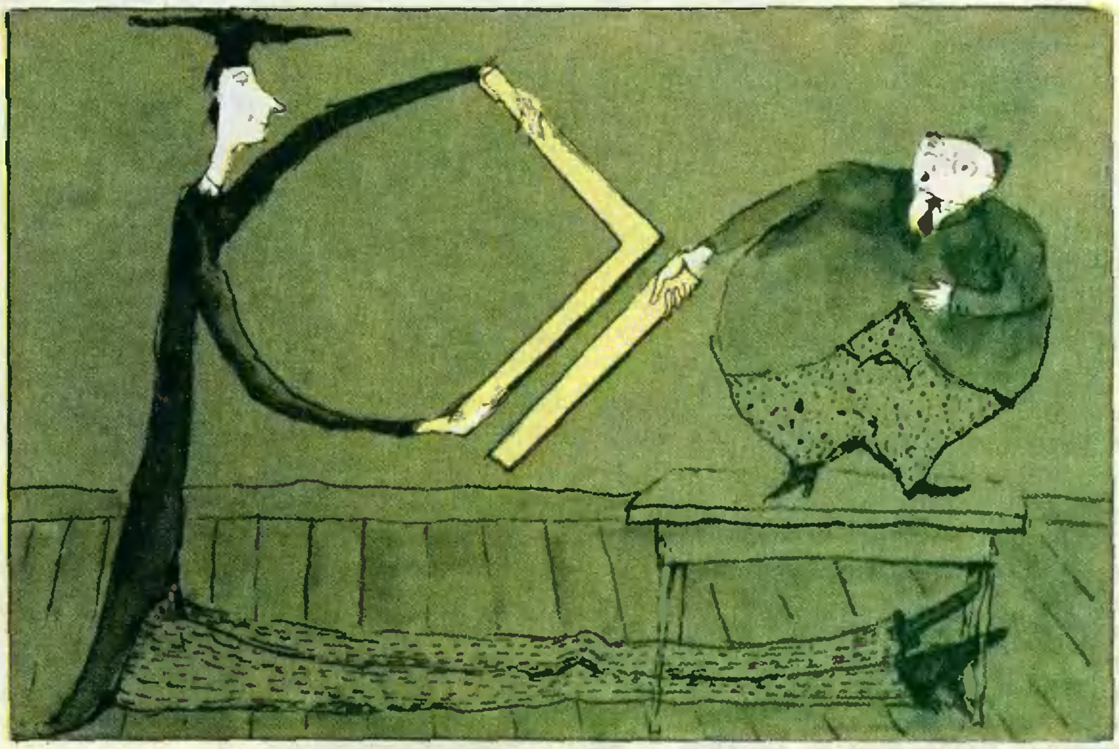
окружн (S_x, S_y), r, розовый
<u>кон</u>

Программа:

```
10'    окружность
20 PRINT «Построим окружность,»
30 PRINT «проходящую через три
          точки.»
40 INPUT «Координаты первой точ-
          ки»; X1, Y1
50 INPUT «Координаты второй точ-
          ки»; X2, Y2
60 INPUT «Координаты третьей точ-
          ки»; X3, Y3

70 IF (X2—X1)*(Y3—Y2)=
   (Y2—Y1)*(X3—X2)
  THEN PRINT «Через эти точки
             нельзя провести ок-
             ружность (и притом
             единственную!)»
  ELSE GOSUB 200
80 GOTO 80
90 END

200'   изображение

210 SCREEN 2
220 PSET (X1, Y1), 13
230 PSET (X2, Y2), 13
240 PSET (X3, Y3), 13
250  L=((Y3—Y2)*(Y3—Y1)—(X2—
   X3)*(X3—X1))/((Y2—Y1)* (X3 —
   X2)—(X2—X1)*(Y3—Y2))/2
260  SX=(X1+X2)/2+L*(Y2—Y1)

270  SY=(Y1+Y2)/2+L*(X1—X2)
280 R=SQR((SX—X1)^2+
    (SY—Y1)^2)
290 CIRCLE (SX, SY), R, 13
300 RETURN
```

В заключение предлагаем вам самостоятельно разобрать следующую задачу, пользуясь предыдущей как образцом.

З а д а н и е. *Напишите постановку, сценарий, алгоритм и программу нахождения и изображения общей точки двух отрезков, заданных координатами их концов.*



Практикум абитуриента

Решения нестрогих неравенств

И. Г. ГАБОВИЧ, П. И. ГОРНШТЕЙН

В этой статье пойдет речь о решении *нестрогого* неравенства $f(x)\geqslant 0$ или, вернее, о том, насколько это решение отличается от решения соответствующего строгого неравенства $f(x)>0$. С наивной точки зрения дело обстоит просто: решением неравенства $f(x)>0$ служит объединение нескольких конечных или бесконечных интервалов*), а чтобы получить решение неравенства $f(x)\geqslant 0$, нужно к этим интервалам добавить их концы.

В некоторых случаях это правило дает верный результат. Например, так будет в случае линейных неравенств: решением нестрогого неравенства

$$ax+b>0$$

служит множество $(-b/a;\ \infty)$, а решением строгого неравенства

$$ax+b\geqslant 0$$

— множество $[-b/a;\ \infty)$, получающееся из предыдущего множества присоединением конца интервала $-b/a$. Но уже в случае квадратных неравенств наше правило приобретает изъян. Простейший пример: решением неравенства

$$-x^2>0$$

служит пустое множество, а решением неравенства

$$-x^2\geqslant 0$$

— не пустое множество, как можно было бы подумать, а множество, состоящее из одной точки $x=0$. Впрочем, это бывает только в том случае, если дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства равен нулю; например, если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два раз-

*) Строго говоря, это верно, если $f(x)$ — *непрерывная* функция, определенная на всей прямой или на некотором объединении интервалов.

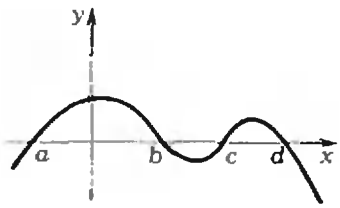


Рис. 1.

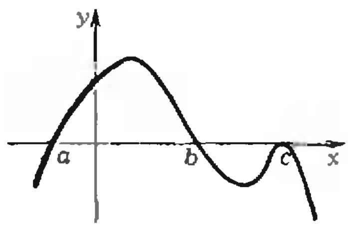


Рис. 2.

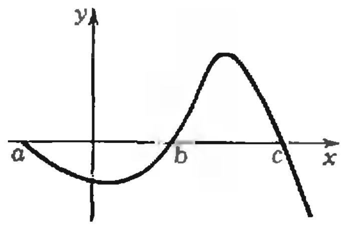


Рис. 3.

личных корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) и $a>0$, то решением неравенства

$$ax^2+bx+c>0$$

служит объединение $(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\infty)$, а решением неравенства

$$ax^2+bx+c\geqslant 0$$

— объединение $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ \infty)$.

В чем же тут дело? Если в точках графика функции $y=f(x)$, лежащих на оси Ox, функция $f(x)$ *меняет знак*, т. е. ее график переходит с одной стороны оси Ox на другую, то сформулированное выше «правило» верно; например, для функции $f(x)$, график которой изображен на рисунке 1, решением неравенства $f(x)>0$ служит объединение $(a;\ b)\cup(c;\ d)$, а решением неравенства $f(x)\geqslant 0$ — объединение $[a,\ b)\cup[c,\ d]$. Для функции же, график которой изображен на рисунке 2, неравенство $f(x)>0$ имеет решение $(a,\ b)$, а неравенство $f(x)\geqslant 0$ — решение $[a,\ b]\cup\{c\}$! Еще пример: функция $y=f(x)$ определена при $x\geqslant a$ и имеет график, показанный на рисунке 3. Тогда неравенство $f(x)>0$ имеет решение $(b,\ c)$, а неравенство $f(x)\geqslant 0$ — решение $\{a\}\cup[b,\ c]$!

Если A — объединение интервалов, то множество, получающееся из A присоединением концов интервалов множества A, называется *замыканием* множества A и обозначается через $\bar{A}$. Сказанному выше можно придать такую форму: если A есть решение неравенства $f(x)>0$, а B — решение неравенства $f(x)\geqslant 0$, то B содержит $\bar{A}$, но может с ним не совпадать.

Как же правильно решить нестрогое неравенство $f(x)\geqslant 0$, зная решение строгого неравенства $f(x)>0$?

Очень просто: нужно присоединить к решению строгого неравенства $f(x)>0$ все решения у р а в н е н и я $f(x)=0$.

К этому очевидному замечанию мы добавим еще одно очевидное замечание, которое может оказаться полезным на практике: решением неравенства $f(x)g(x)\geqslant 0$ служит объединение решений систем неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} f(x)\leqslant 0, \\ g(x)\leqslant 0. \end{cases}$$

(Аналогично — для неравенства $f(x)g(x)\leqslant 0$.)

Теперь рассмотрим несколько примеров (некоторые из них взяты из конкурсных экзаменов разных лет).

П р и м е р 1. *Решить неравенство*

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\,(8x^2-6x+1)\geqslant 0.$$

Решим четыре неравенства:

$\sqrt{-25x^2+15x-2}\geqslant 0;$

решение: $\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$.

$\sqrt{-25x^2+15x-2}\leqslant 0;$

решение: $x=\frac{1}{5}$ и $x=\frac{2}{5}$.

$8x^2-6x+1\geqslant 0;$

решение: $x\leqslant\frac{1}{4}$ и $x\geqslant\frac{1}{2}$.

$8x^2-6x+1\leqslant 0;$

решение: $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

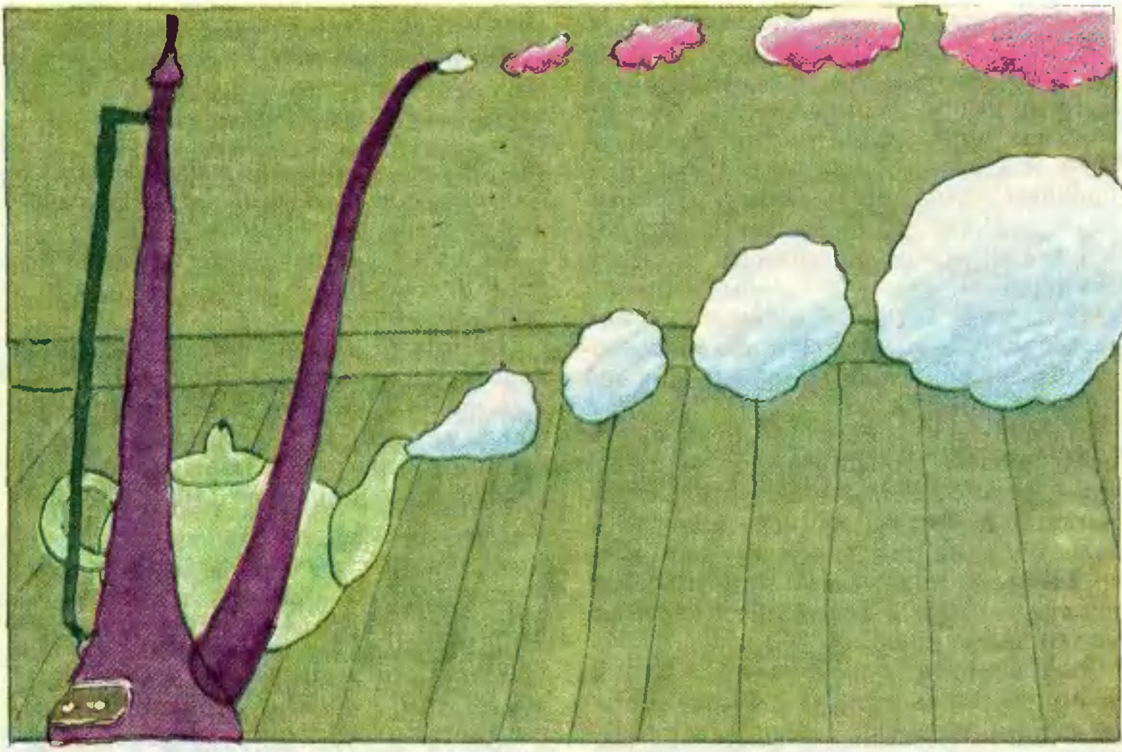
Обозначив четыре найденных множества соответственно через A, B, C, D, мы можем сказать, что решением исходного неравенства служит множество $(A\cap C)\cup(B\cap D)$. Произведя указанные действия, получаем

О т в е т: $\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

П р и м е р 2. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-7,5x+14}\ \log_2|x-3|\leqslant 0.$$

(Окончание см. на с. 66)



Практикум абитуриента

Парообразование. Свойства паров

Кандидат физико-математических наук А. А. ВАРЛАМОВ

Испарение. Насыщенный и ненасыщенный пары

Как известно, процесс парообразования — переход вещества из жидкого состояния в газообразное — может происходить двумя путями: испарением и кипением. Начнем с первого.

В жидкости, как и в газе, частицы находятся в постоянном тепловом движении. Но если в газе (при обычных условиях) кинетическая энергия движения молекул значительно превышает потенциальную энергию их взаимодействия, то в жидкости эти величины оказываются одного порядка. Поэтому молекулы жидкости совершают лишь тепловые колебания около некоторых положений равновесия, временами «перепрыгивая» в другие. Средняя энергия таких колебаний определяется температурой жидкости, однако в жидкости всегда имеется некоторое число молекул с кинетическими энергиями, существенно бо́льшими средней. Когда такие высокоэнергетичные молекулы оказываются в приповерхностном слое, они могут, в принципе, преодолев притяжение со стороны окружающих молекул, выйти за пределы жидкости и образовать над ее поверхностью газообразную фазу — пар. Описанный процесс и называется испарением. Важно, что в той или иной степени испарение имеет место при всех температурах. Испаряются любые жидкости и даже твердые тела (для них процесс испарения называют сублимацией).

Если жидкость находится в закрытом сосуде, то, наряду с процессом испарения, т. е. вылетом из жидкости быстрых молекул, происходит и обратный процесс — возвращение молекул из пара в жидкость, т. е. конденсация. В конечном счете между жидкостью и паром устанавливается динамическое равновесие — состояние, в котором число частиц, покидающих жидкость в единицу времени, в среднем равно числу возвращающихся в нее частиц. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным.

Задача 1. *Равны ли между собой температуры жидкости и находящегося в динамическом равновесии с ней насыщенного пара?*

В ответ на такой вопрос на экзамене часто можно услышать, что температура пара выше, чем температура жидкости, поскольку испаряются — вылетают из жидкости — наиболее «горячие» молекулы, кинетическая энергия которых в жидкости была заметно выше средней.

Это неверно, и вот почему. Вырываясь из жидкости, «горячим» молекулам приходится совершать работу против сил притяжения, действующих на них со стороны окружающих молекул. Эта работа производится за счет уменьшения кинетической энергии «горячих» молекул, в результате чего они, переходя в пар, «охлаждаются». Причем «охлаждаются» именно до температуры жидкости. Это и понятно — температуры жидкости и находящегося с ней в равновесии насыщенного пара *должны быть равны*, иначе нарушалось бы одно из важнейших условий термодинамического равновесия системы — равенство температур ее отдельных элементов.

Какими же свойствами обладает насыщенный пар? При заданной температуре он характеризуется определенным давлением $p_н(T)$, которое, в отличие от случая идеального газа, не зависит от занимаемого объема. Объем же сосуда, в котором находится насыщенный пар, определяет его массу. Оказывается, что, несмотря на имеющееся взаимодействие между молекулами насыщенного пара (именно оно и приводит к конденсации пара), его состояние можно с довольно высокой точностью описывать с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона. Поэтому для массы пара, занимающего при температуре T объем V, имеем

$$m=\frac{p_н(T)VM}{RT},$$

где M — молярная масса рассматриваемого вещества, R — универсальная газовая постоянная.

Задача 2. *Сравните плотности воды и насыщенного водяного пара при температуре $t=100$ °C.*

Плотность насыщенного пара определим из уравнения Менделеева — Клапейрона, приняв во внимание тот факт, что при 100 °C давление насыщенного пара равно нормальному атмосферному давлению (10^5 Па):

$$\varrho_п=\frac{p_н M}{RT}=0{,}58\ кг/м^3,$$

где $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). Плотность воды при той же температуре равна $\varrho_в=0{,}98\cdot10^3$ кг/м^3. Таким образом, плотность насыщенного водяного пара меньше плотности воды примерно в 1700 раз.

В случае, когда испаряющееся вещество достаточно интенсивно отводится от поверхности и поэтому испарение преобладает над конденсацией, образующийся пар является ненасыщенным. Ненасыщенный пар образуется также после полного испарения жидкости в закрытом сосуде, если ее начальная масса была меньше необходимой для образования насыщенного пара. При описании свойств ненасыщенного пара также можно пользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона. Кроме того, ненасыщенный пар подчиняется известным закономерностям для различных изопроцессов идеального газа (чего нельзя сказать про насыщенный пар).

Давление и плотность ненасыщенного пара меньше, чем насыщенного при той же температуре. Поэтому ненасыщенный пар можно обратить в насыщенный путем изотермического сжатия или изохорного охлаждения.

Задача 3. *В жарко натопленной кухне открыли форточку. За окном — сильный мороз. Что увидит наблюдатель, смотрящий на проем форточки из кухни? С улицы?*

Наблюдатель, находящийся на улице, увидит, что из открытой форточки вверх валит пар. Действительно, горячий воздух из кухни будет выходить через форточку и подниматься вверх. Содержащийся в воздухе ненасыщенный водяной пар немедленно охлаждается, становится насыщенным и начинает конденсироваться, образуя множество мельчайших капелек, которые мы и видим. Именно о них обычно и говорят — «водяной пар», хотя на самом деле это не пар, а туман. Водяной пар — прозрачен и сам по себе не может быть видимым.

Более неожиданным окажется зрелище, которое будет наблюдать зритель внутри кухни. Он увидит, как в натопленную кухню через форточку с улицы валит пар и опускается вниз. В чем здесь дело? Холодный воздух с улицы, замещая вышедший через форточку горячий, не сразу смешивается с воздухом внутри кухни и, будучи значительно холоднее, опускается вниз. Попадающий в него из окружающего теплого воздуха водяной пар охлаждается, становится насыщенным и частично конденсируется. Наблюдателю же кажется, что клубы этого тумана падают вниз.

Влажность воздуха

Для количественной характеристики содержания в воздухе водяных паров вводятся специальные физические величины — абсолютная влажность и относительная влажность воздуха. Абсолютной влажностью принято называть давление ненасыщенного водяного пара, присутствующего в воздухе. Отношение этого давления к давлению насыщенного водяного пара при той же самой температуре называют относительной влажностью воздуха.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 4. *В помещение нужно подать $V=10\,000$ м^3 воздуха при температуре $t_1=18$ °С и относительной влажности $\varphi_1=50\,\%$, забирая его с улицы при $t_2=10$ °С и относительной влажности $\varphi_2=60\,\%$. Сколько воды следует дополнительно испарить в подаваемый воздух? Давление насыщенных паров при t_1 равно $p_{н1}=2{,}1\cdot 10^3$ Па, а при t_2 — $p_{н2}=1{,}2\times10^3$ Па.*

Из уравнения Менделеева — Клапейрона определим массу насыщенного пара, находящегося в объеме V в условиях помещения и улицы:

$$m_{н1}=\frac{\mathrm{M}p_{н1}V}{RT_1},\quad m_{н2}=\frac{\mathrm{M}p_{н2}V}{RT_2}.$$

Зная относительную влажность воздуха в каждом из двух случаев, найдем истинные массы воды, содержащейся в воздухе:

$$m_1=\varphi_1 m_{н1},\quad m_2=\varphi_2 m_{н2}.$$

Разность этих масс

$$\Delta m=m_1-m_2=$$

$$=\frac{\mathrm{M}V}{R}\left(\frac{\varphi_1 p_{н1}}{T_1}-\frac{\varphi_2 p_{н2}}{T_2}\right)=21{,}7\ \text{кг}$$

и определяет то количество воды, которое следует дополнительно испарить в подаваемый воздух.

Задача 5. *При какой максимальной относительной влажности воздуха в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1=5$ °С, в комнате $t_2=25$ °С. Давление насыщенных паров воды при t_1 равно $p_{н1}=866$ Па, при t_2 — $p_{н2}=3192$ Па.*

Когда бутылку вынимают из холодильника, температура воздуха вблизи ее поверхности быстро понижается до 5 °С. При этом бутылка не запотеет, если для находящегося в комнате воздуха не будет перейдена точка росы (температура конденсации), т. е. если относительная влажность воздуха при его охлаждении до 5 °С не достигнет 100 %. Таким образом,

$$\varphi_1=\frac{p_1}{p_{н1}}100\,\% \leqslant 100\,\%,\quad \varphi_2=\frac{p_2}{p_{н2}}100\%,$$

при этом

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем, что относительная влажность воздуха в комнате должна быть меньше

$$\varphi_{2max}=\frac{p_{н1}}{p_{н2}}\frac{T_2}{T_1}100\,\%=29\,\%.$$

Задача 6. *В закрытом с обоих концов горизонтальном цилиндре объемом $V=2$ л свободно перемещается невесомый поршень. В пространство с одной стороны поршня вводится $m_1=2$ г воды, а с другой — $m_2=1{,}0$ г азота. Где установится поршень при $t=100\,^\circ C$?*

Давление, создаваемое водяным паром, будет существенно зависеть от того, насыщенный он или нет. Заранее мы ничего определенного сказать не можем, поэтому примем в качестве гипотезы, что вся введенная в сосуд вода испарилась, но образовавшийся водяной пар все же оказался ненасыщенным. Решим задачу в этом предположении, а затем вычислим давление пара, сравним его с давлением насыщенного пара при $100\,^\circ C$ и сделаем вывод о правильности или неправильности нашей гипотезы.

Если пар ненасыщенный, то его давление p_1 связано с занимаемым объемом V_1 уравнением Менделеева—Клапейрона:

$$p_1=\frac{m_1RT}{M_1V_1}.$$

Поскольку поршень находится в равновесии, давления водяного пара и азота должны быть равны:

$$p_1=p_2,\ \text{где}\ p_2=\frac{m_2RT}{M_2(V-V_1)}.$$

Отсюда находим, что

$$V_1=V\frac{m_1M_2}{m_1M_2+m_2M_1}=1{,}51\ \text{л}.$$

Подставляя найденный объем в формулу для давления пара, находим, что оно составляет $2{,}3\cdot10^5$ Па, что превышает давление насыщенного пара при рассматриваемой температуре $p_н=10^5$ Па. Таким образом, наше исходное предположение было неверным — пар в цилиндре насыщенный, и его давление равно 10^5 Па. Нам осталось найти объем, занимаемый азотом, при котором его давление такое же, как и давление пара:

$$V_2=\frac{m_2RT}{M_2p_н}=1{,}1\ \text{л}.$$

Итак, 11/20 объема цилиндра занимает азот, а 9/20 — водяной пар (точнее, водяной пар и капля воды, но ее объемом можно пренебречь — проверьте это сами).

Кипение

В отличие от испарения, при кипении парообразование, причем интенсивное, происходит не только на свободной поверхности жидкости, но и во всем ее объеме. Когда это возможно?

Предположим, что в жидкости возник пузырек пара. Для того чтобы он тут же не схлопнулся, необходимо, чтобы давление насыщенного пара при данной температуре внутри пузырька было не меньше внешнего давления. Давление на пузырек извне определяется тремя слагаемыми — внешним давлением p над поверхностью жидкости, гидростатическим давлением ρgh столба жидкости и дополнительным давлением $2\sigma/r$*) под искривленной поверхностью пузырька, обусловленным поверхностным натяжением (σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус пузырька). Таким образом, условие существования пузырька пара в жидкости записывается в виде:

$$p_н(T)\geqslant p+\rho gh+\frac{2\sigma}{r}.$$

Чаще всего мы говорим о кипении воды в открытом сосуде, тогда $p\approx10^5$ Па. Для того чтобы гидростатическое давление могло конкурировать с давлением p, столб воды должен составлять хотя бы несколько метров, чего обычно, конечно, не бывает. Давление, связанное с поверхностным натяжением, существенным становится тогда, когда $r\approx\approx10^{-3}$ мм, что много меньше размеров пузырьков, которые обычно возникают при кипении воды. Так что для кипения воды в обычных условиях достаточно выполнения условия

$$p_н(T)\approx p.$$

В своих рассуждениях мы приняли

*) См., например, статью А. И. Буздина и С. С. Кротова «Поверхностное натяжение и капиллярные явления» («Квант», 1988, № 4).

за факт, что пузырек с насыщенным паром в жидкости уже образовался. А откуда он взялся? Это совсем не простой вопрос.

Один из путей возникновения пузырька может быть, например, таким: поскольку молекулы жидкости постоянно движутся, случайно может оказаться, что плотность в некоторой макроскопической области пространства понизится до плотности насыщенного пара при данной температуре. Вот вам и пузырек. Строгая теория на это предположение дает следующий ответ: да, такое событие произойти может, однако его вероятность столь мала, что закипания чайника таким способом можно прождать миллиарды лет. Второй путь — это возникновение пузырьков всегда имеющихся в жидкости растворенных газов и испарение воды в такие, изначально газовые, пузырьки. Это в принципе возможно. Но гораздо более эффективный механизм рождения достаточно крупных пузырьков пара связан с наличием неоднородностей дна и стенок сосуда, в котором происходит кипение, или примесей в самой жидкости. Именно они обычно становятся центрами парообразования, на них возникают начальные пузырьки пара. И уже затем, если температура жидкости такова, что выполняется условие кипения для образовавшихся пузырьков, то они, разрастаясь в объеме, всплывают на поверхность и там лопаются.

Задача 7. *Определите наибольший допустимый размер пузырьков, при котором может происходить перегрев воды на $\Delta t=1$ °C. Атмосферное давление $p=10^5$ Па, давление насыщенного пара вблизи температуры кипения воды $t_к=100$ °C при увеличении температуры на 1 °C возрастает на $\Delta p=10^3$ Па, коэффициент поверхностного натяжения воды при этих условиях равен $\sigma=0{,}6$ Н/м.*

Если жидкость тщательно очистить от примесей и нагревать в сосуде с достаточно гладкими стенками, то ее действительно можно перегреть выше температуры кипения при данном атмосферном давлении, иногда даже весьма значительно.

Ясно, что, для того чтобы точка кипения повысилась, необходимо, чтобы не возникало слишком крупных пузырьков. Ограничения на радиус пузырька, который станет устойчивым только при 101 °C, а до этой температуры будет схлопываться силами поверхностного натяжения, найдем из условия:

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{r_{max}}$$

(давлением столба жидкости мы здесь пренебрегли; оцените сами, при каких высотах столба это можно делать), откуда

$$r_{max}=\frac{2\sigma}{\Delta p}=1{,}2\cdot10^{-4}\ \text{м}.$$

Таким образом, размер шероховатостей на стенках сосуда не должен превышать 0,01—0,1 мм, иначе на них будут появляться пузырьки пара нежелательного размера и жидкость перегреть не удастся.

Упражнения

1. Определите давление насыщенного водяного пара при температуре $t=17$ °C, если в комнате объемом $V=50$ м^3 при относительной влажности $\varphi=65$ % и указанной температуре находится $m=0{,}476$ кг паров воды.

2. В сосуде смешивают две порции воздуха: объемом $V_1=2$ л с относительной влажностью $\varphi_1=40$ % и объемом $V_2=6$ л с относительной влажностью $\varphi_2=20$ %. Каким должен быть объем сосуда, чтобы влажность в нем была равной $\varphi=75$ %? Температуру считать постоянной.

3. В сосуде объемом $V=100$ л находился сухой воздух. Затем в сосуд налили $m=100$ г воды и герметически закрыли его. Вся ли вода превратится в пар, если сосуд нагреть до температуры $t=100$ °C и поддерживать эту температуру постоянной? Молярная масса воды $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К). Изменением объема сосуда при нагревании можно пренебречь.

4. Воздух при температуре $t_1 = 20\ ^\circ$C имеет относительную влажность $\varphi = 70\ \%$. Сколько водяного пара сконденсируется из $V = 10$ м^3 воздуха, если температура воздуха понизится до $t_2 = 10\ ^\circ$C? Давление насыщенных паров при температуре t_1 равно $p_{н1} = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па, а при t_2 — $p_{н2} = 1{,}2 \cdot 10^3$ Па.

5. Кондиционер подает в помещение объемом $V = 50\,000$ м^3 воздух при температуре t_1 и относительной влажности $\varphi_1 = 60\ \%$, забирая его с улицы при температуре t_2 и относительной влажности $\varphi_2 = 80\ \%$. Сколько воды дополнительно испаряет кондиционер в подаваемый воздух? Плотность насыщенных паров при температуре t_1 равна $\rho_{н1} = 15{,}4 \times 10^{-3}$ кг/м^3, а при температуре t_2 — $\rho_{н2} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

Решения нестрогих неравенств

(Начало см. на с. 59)

Решение. Снова решаем четыре неравенства:

$\sqrt{x^2 - 7{,}5x + 14} \geqslant 0$; решение: $x \leqslant \frac{7}{2}$, $x \geqslant 4$.

$\sqrt{x^2 - 7{,}5x + 14} \leqslant 0$; решение: $x = \frac{7}{2}$, $x = 4$.

$\log_2 |x - 3| \geqslant 0$; решение: $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$.

$\log_2 |x - 3| \leqslant 0$; решение $2 \leqslant x < 3$, $3 < x \leqslant 4$.

Здесь ответом (в обозначениях, аналогичных предыдущему примеру) будет множество $(A \cap D) \cup (B \cap C)$, где A, B, C, D — найденные четыре множества.

Ответ: $[2;\ 3) \cup \left(3;\ \frac{7}{2}\right] \cup \{4\}$.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$(1 + \sin x)(x^2 - 3x - 28) \geqslant 0.$$

Решение. Действуем по прежней схеме:

$1 + \sin x \geqslant 0$; решение: все x $(-\infty < x < \infty)$.

$1 + \sin x \leqslant 0$; решение: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$x^2 - 3x - 28 \geqslant 0$; решение: $x \leqslant -4$, $x \geqslant 7$.

$x^2 - 3x - 28 \leqslant 0$; решение: $-4 \leqslant x \leqslant 7$.

Рассматривая множество $(A \cap C) \cup (B \cap D)$, получаем

Ответ: $(-\infty;\ -4] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}\pi\right\} \cup [7;\ \infty)$.

Пример 4. *Решить неравенства*

а) $|x - 1| + |x + 1| - 2 < 0$;

б) $|x - 1| + |x + 1| - 2 \leqslant 0$.

Решение. См. график функции $y = |x - 1| + |x + 1| - 2$ на рисунке 4.

Ответ. а) $\varnothing$ (пустое множество); б) $[-1;\ 1]$.

Этот пример интересен тем, что решения строгого и нестрогого неравенств отличаются на целый отрезок!

Упражнения. Решите неравенства:

1. $x^2 - \sqrt{x} \geqslant 0$;
2. $\sqrt{(x-2)^2 - \sqrt{6 - (x-2)^2}} \geqslant x - 2$;
3. $(x - 1)\sqrt{-x^2 + x + 6} \leqslant 0$;
4. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geqslant 0$;
5. $\frac{1}{2}\log_{4+x}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1} \times (-x^2 - 5x - 4) \leqslant 3$;
6. $3^{x^2+2} + 3^{x^2} \leqslant 2 \cdot 5^{x^2+1}$.

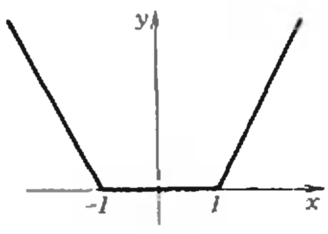


Рис. 4.

Информация

Новосибирск — Андовер. Продолжение обмена

В девятом номере журнала «Квант» за 1987 год была опубликована статья В. Г. Харитонова о первом обмене учащимися между Новосибирской ФМШ № 165 и Академией Филлипс (США). В сентябре — октябре 1987 года состоялся второй обмен между школами. Советскую делегацию представляли десять учащихся: Абросова Елена из Усть-Каменогорска, Айкина Светлана из Новокузнецка, Гунченко Эдуард из Петропавловска-Камчатского, Гурова Валерия из Читинской области, Дробышев Максим из Алма-Атинской области, Ерохов Сергей из Новокузнецка, Малыхин Денис из Омска, Мельников Алексей из Красноярска, Огилько Сергей из Целиноградской области и Тисленок Илья из Томска и два руководителя: директор школы кандидат физико - математических наук А. А. Никитин и заместитель директора по учебно-воспитательной работе Ю. В. Михеев. В этом номере они делятся своими впечатлениями о поездке.

Советская делегация прибыла в Андовер 15 сентября. В тот же день вся школа фотографировалась на ступеньках галереи искусств, после чего на лужайке около столовой был организован пикник. 16 сентября директор Академии Филлипс Дональд Мак-Немар устроил традиционный прием всей школы на лужайке около своего дома, а оттуда все отправились в здание церкви на торжественное открытие занятий. Это было первым событием, которое произвело на нас очень сильное впечатление. Сначала все кроме сениоров (учеников выпускного класса) вошли в зал и устроились на боковых местах. Затем стали входить сениоры, которых зал восторженно приветствовал. Шум при этом стоял невероятный, ученики кричали, стучали ногами, свистели, хлопали. Это продолжалось в течение нескольких минут, но как только встал директор и поднял руку, мгновенно наступила тишина. В своем выступлении директор отметил, что открытие школы происходит в знаменательный день, который совпал с празднованием 200-летия американской Конституции. Затем он рассказал, сколько учащихся начинают занятия в Академии Филлипс, и особо отметил, что в этом году будут учиться школьники из 29 стран мира, в том числе 5 китайских школьников и 10 школьников из Новосибирской ФМШ по обмену с Академией Филлипс. Затем слово было предоставлено А. А. Никитину. Его речь на английском языке была встречена бурными аплодисментами. После этого президент ученического коллектива рассказал о программе на предстоящий учебный год, под его руководством весь зал исполнил традиционную песню Академии Филлипс с множеством движений, а затем великолепно выступил школьный симфонический оркестр.

С 17 сентября начались трудовые будни. Каждый из наших учеников выбрал один из математических курсов, один курс, связанный с искусством, и два курса из следующих трех: физика, химия, программирование.

Математические курсы рассчитаны на любых учеников: от тех, кто имеет лишь самые элементарные навыки, до таких, которые уже два-три года изучали математику в Академии Филлипс. Особого внимания заслуживают вводный курс исчисления функций (Precalculus), исчисление функций (Calculus), теория вероятностей, математическая статистика, векторный анализ, теория функций комплексного переменного. Право выбора отдельных курсов нужно «заработать», изучив предварительно определенные курсы, поэтому количество учащихся в группах колеблется от 20—22 до 4—5. Сложность отдельных курсов, изучаемых в последнем, двенадцатом классе достаточно высока. Например, курс по теории функций комплексного переменного близок к первому — второму курсам наших университетов. По каждому из курсов имеются учебники, многие из них подготовлены преподавателями Академии Филлипс. При беглом знакомстве с учебником у нас создалось впечатление, что американские учителя совсем мало внимания уделяют логике доказательств, большинство теорем изучают на уровне интуитивных рассуждений и учат их применению в решении задач. Однако, как мы смогли увидеть на занятиях, логике и методологии решения задач уделяется очень большое внимание на уроках. Темп изучения материала высок, причем многое дается в качестве домашнего задания, а занятия превращаются скорее в беседы и консультации по домашней работе. Ученики задают вопросы в любой момент времени, учитель прерывает свои рассуждения и подробно и обстоятельно отвечает, пока все ученики не разберутся во всем, а затем продолжает объяснения. Учитель преимущественно сам работает у доски, ученики к доске вызываются исключительно редко, а проверка знаний проводится только письменно.

Подобным образом проходят занятия и по другим предметам. Курсы по программированию (Computer) рассчитаны только на один триместр, изучаются алгоритмические языки Лого и Паскаль с практической работой на персональных компьютерах Apple, Makintosh и IBM.

Подходы к обучению различны. На одном из курсов принципы программирования разбирались на примере готовой программы, играющей в «крестики — нолики».

На другом курсе, наоборот, начали изучение с составления простейших программ, рисующих картинки, а затем стали усложнять эти программы, вводя понятия процедур, переменных, циклов, условных переходов и так далее. Теоретические занятия чередовались с практической работой на ЭВМ.

Мы не заметили, чтобы компьютеры широко применялись на уроках по другим предметам. В основном они используются при работе с текстами: печатании и редактировании. По математике несколько занятий проводились с программой, которая позволяет строить графики элементарных функций, определять их нули, вычислять производные и изображать касательные к графику, находить значения определенных интегралов, изображать фигуры вращения относительно различных осей и вычислять их объем.

Структура курса физики в Академии Филлипс близка к принятой в нашей стране, изучение начинается с механики и постепенно за три триместра доходит до основ атомной физики. Есть два уровня изучения: один для тех, кто желает получить общее знакомство с физикой, а второй — для желающих получить глубокие знания. При внешне одинаковой структуре эти уровни отличаются использованием математического аппарата, а поэтому для выбора глубокого курса физики необходимо предварительно изучить, как минимум, Calculus.

На уроке математики.

Важным для наших учеников было совершенствование в языке. Большинство учителей и учащихся Академии Филлипс проявляли заметный интерес к представителям Советского Союза, поэтому если возникали трудности с языком, то старались и говорить помедленнее, и употреблять какие-то другие слова. На уроках английского языка много внимания уделялось шуткам, юмору, иногда устраивались дискуссии с американскими школьниками о спорте, об образовании, о культурной жизни и так далее.

Очень скоро выяснилось, что учиться в Академии Филлипс достаточно трудно как для наших школьников, так и для американских. Некоторые ученики (правда, таких немного) вынуждены через одну-две недели бросать один из выбранных курсов, оставляя только четыре. Нашим ученикам большинство курсов по математике и физике показались слишком простыми, знакомыми, однако недели через две пришлось прилагать много усилий, чтобы справляться со всем объемом работы, но еще через некоторое время, когда ребята начали достаточно свободно воспринимать речь американцев, учиться стало полегче.

Наша жизнь в США, конечно, не ограничивалась

Светлана Айкина в компьютерном классе.

только учебой и спортом. Проходило много разнообразных встреч. Особенно запомнились встречи с клубами: русским, интернациональным, политическим. Запомнились также поездки в Бостон, где мы побывали на смотровой площадке небоскреба, в музее науки, на бейсбольном матче, в Гарвардском университете. Еще мы посетили Джорджтаунский универститет в Вашингтоне, а также две частные школы: Академию Филлипс Экзетер недалеко от Андовера и Сейнт Олбани в Вашингтоне. Посещение этих школ позволило нам понять, что система жизни и учебы в школах США не «стандартизирована». Было очень непривычно видеть строгую форму одежды в Экзетер и ритуальные обряды в столовой Сейнт Олбани. Ученики Академии Филлипс свободны в общении между собой и с учителями, могут пренебрежительно относиться к своей одежде, не связаны никакими ритуалами во время приема пищи.

Последние несколько дней в США наша делегация должна была провести в Вашингтоне. В связи с этим нам очень часто говорили, что нашей делегации повезло, что мы сможем увидеть самый красивый город США, и очень часто задавали вопрос, будем ли мы встречаться с президентом Р. Рейганом. Однако лишь вечером 15 октября нам сообщили, что завтра в час дня нашу делегацию будет принимать президент США. Утром 16 октября мы вылетели в Вашингтон, устроились в гостинице и отправились в Советское посольство в Вашингтоне, где нас очень тепло встретил посол Ю. В. Дубинин. И несмотря на то, что встреча была очень короткой, после нее сразу снялось то напряжение, которое охватило членов делегации перед встречей с президентом США. К часу дня нас провели в небольшую приемную президента, где уже находилось множество телерепортеров, фотокорреспондентов и журналистов. Ровно в час появился Рональд Рейган. Света Айкина вручила ему значок, посвященный обмену между Новосибирском и Андовером, президент США зачитал заготовленное сообщение, в котором отметил, что обмены среди молодежи будут способствовать улучшению отношений между нашими странами. Репортеры начали задавать вопросы, не относящиеся к проблеме обменов, президент ответил на два вопроса и попросил репортеров удалиться. Затем директор Академии Филлипс коротко рассказал о нашем обмене. Выслушав его речь, Рейган сказал, что у него очень плотное расписание, но тем не менее остался и ответил на вопросы. На вопрос, как он относится к изменениям, происходящим в нашей стране, президент ответил, что с интересом следит за ними, ему нравится перестройка и гласность, что у него хорошие отношения с М. С. Горбачевым и что в ближайшем будущем состоится встреча руководителей СССР и США. На замечание о том, что в Советском Союзе больше знают о США, чем в Соединенных Штатах об СССР, он сказал, что сейчас в США интерес к СССР возрастает, а начавшиеся культурные и научные обмены помогут народам наших стран больше узнать друг о друге. В конце встречи президент сфотографировался с участниками делегации.

Оставшиеся дни мы знакомились со столицей США, ее музеями и достопримечательностями.

За время пребывания нашей группы в США было много встреч, завязалось много дружеских отношений, накопилось много впечатлений. Но несмотря на все это мы испытали ни с чем не сравнимое чувство, когда 22 октября приземлились в Шереметьево в дорогой нам всем Москве.

А. А. Никитин,
Ю. В. Михеев

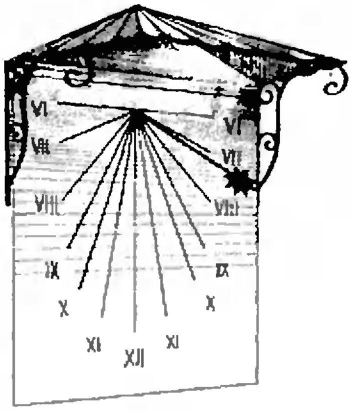
«Квант» улыбается

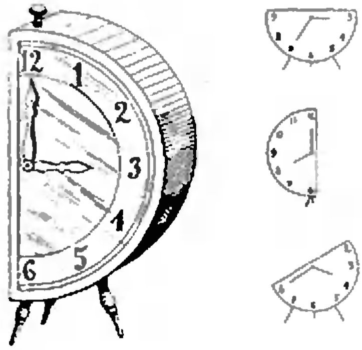
Оригинальные часы

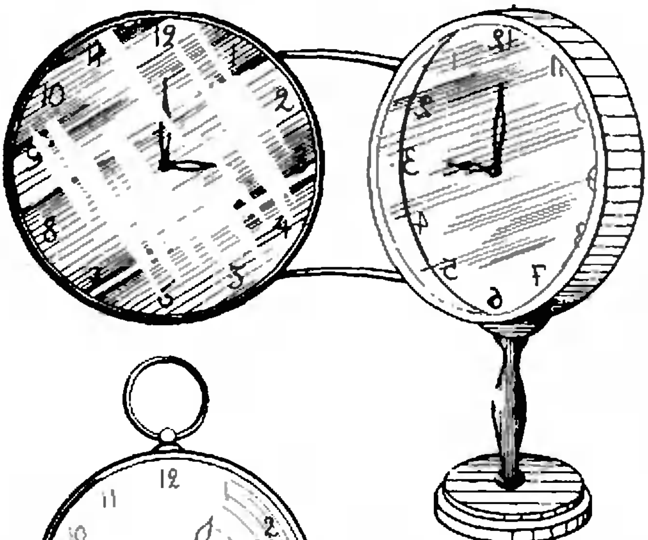
Наручные часы с кукушкой. Какой сюрприз для вашего окружения, когда кукушка с радостным криком выскакивает из часов, поднимая рукав вашей рубашки или пиджака!

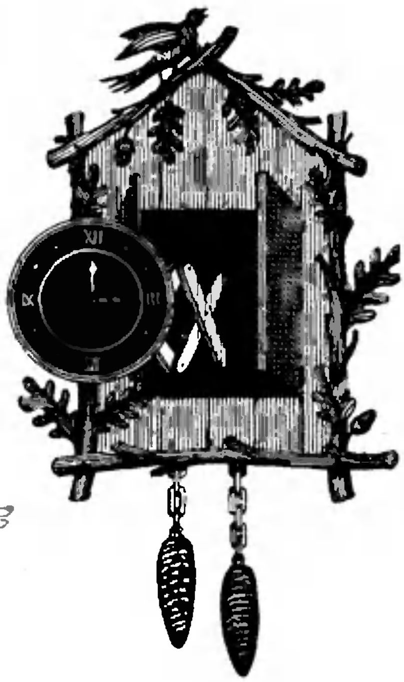
Солнечные часы с козырьком. Цинковый козырек предохраняет солнечные часы от воздействия солнца, которое может испортить циферблат или какую-нибудь иную часовую деталь.

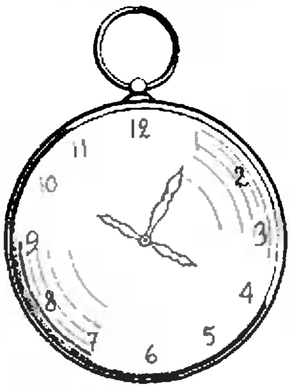
Будильник «половинной» конструкции. Вы можете выбрать модель с наиболее необходимой вам частью циферблата.

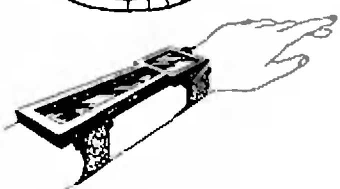












Часы с зеркально обращенными стрелками и цифрами. Они позволяют легко определять время с помощью зеркала заднего обзора.

Часы с тремя стрелками. Вторая маленькая стрелка показывает, какой час был шесть часов назад или какой будет через шесть часов.

Наручные маятниковые часы. Их размеры таковы, что они вполне могут заменить женщине все украшения.

Часы-кукушка с выскакивающим каждый час циферблатом. Все остальное время он находится внутри элегантной деревянной коробки.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1987 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Горьковский (1), Донецкий (2), Омский (3), Саратовский (4), Тбилисский (5) и институты — Горьковский политехнический (6), Киевский педагогический (7), Минский радиотехнический (8), Московский архитектурный (9), Томский политехнический (10), Ярославский педагогический (11).

Математика

Алгебра

1(2). Найдите двузначное число, зная, что число его десятков на 4 больше числа его единиц, а произведение этого числа на полусумму его цифр равно 153.

2(11). Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда он должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он потратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

3(7). По окружности, длина которой 60 м, равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Найдите скорости точек.

4(7). Найдите скорость и длину поезда, если он проходил мимо неподвижного наблюдателя с постоянной скоростью в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

5(7). Два куска латуни имеют (в сумме) массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит на 15 % больше первого?

6(6). Для перевозки 60 т груза намечалось использовать несколько грузовиков. Ввиду большого подъема пути на каждый грузовик пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, и поэтому потребовалось еще 4 машины. Какое число грузовиков предполагалось использовать первоначально?

7(6). Числитель дроби на 2 больше ее знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной ей дробью, получится 74/35. Найдите исходную дробь.

8(6). Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 5.

9(6). Докажите тождество

$$\sin\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

10. Решите уравнения:

а)(2) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

б)(1) $\lg 5+(x-2)\lg 0{,}2=$
$=\lg(26-5^{x-1})$;

в)(1) $\sqrt{\log_5 x^2}+\sqrt{\log_5 x}=\sqrt{2}\log_5 x+1$;

г)(3) $2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5$;

д)(3) $2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3-\lg(3^{\frac{1}{x}}+$
$+27)=0$;

е)(6) $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$;

ж)(9) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$;

з)(9) $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2$;

и)(11) $\sin x(\sin x+\cos x)=1$;

к)(9) $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$;

л)(9) $\cos 2x+\cos^2 x=0$;

м)(9) $\sin 2x+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)-$
$-\frac{3}{2}=0$;

н)(6) $\operatorname{ctg}^4 2x+\frac{1}{\sin^4 2x}=25$;

о)(7) $2\log_3(-\sin x)+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin x\times$
$\times\cos x)+1=0$;

п)(7) $2^{3+2\cos 2\pi x}+4=9\cdot 4^{\cos^2\pi x}$;

р)(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)=\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-$
-2;

с)(3) $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x$;

т)(3) $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg} x=0$;

у)(2) $\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0$;

ф)(1) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1}{2}\times$
$\times\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

11. Решите неравенства:

а)(6) $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$;

б)(1) $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|<1$;

в)(2) $\sqrt{2x-x^2}>1-x$;

г)(2) $\sqrt{3x+x^2}<4-x$;

д)(1) $\sqrt{4\cdot 3^{1-x}-3}<(\sqrt{3})^x$;

е)(11) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3x+5}{x-3}\geqslant 2$;

ж)(6) $\log_{0,5}x>6\log_x 0,5-1$;

з)(11) $\log_{\sqrt{2}}(x^2+2x)<\log_{\sqrt{2}}(x+6)$;

и)(3) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$;

к)(3) $(\log_x 2)(\log_{2x}2)(\log_2 4x)>1$;

л)(3) $x^{\lg x^2-3\lg x+1}>1000$;

м)(7) $\log_{0,2}\log_2\frac{x^2}{x+2}>0$;

н)(2) $a^{\log_{1/4}(x^2-3x+1)}<1$.

12. Решите системы уравнений:

а)(1) $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x^2+xy+y^2=109; \end{cases}$

б)(9) $\begin{cases} 2\cdot 6^x-3y=69, \\ 6^{x-1}-y=5; \end{cases}$

в)(9) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=60, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=1+\lg 3, \end{cases}$

г)(9) $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6, \\ \log_4 x+\log_4 y=-3; \end{cases}$

д)(9) $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y)=x-y; \end{cases}$

е)(1) $\begin{cases} 5^{\lg(x-2y)}=1, \\ 3^{x-y}-26\cdot 3^{\frac{x-y}{2}}=27; \end{cases}$

ж)(7) $\begin{cases} y^{200}=3^{300}, \\ x-\log_3 3y=1; \end{cases}$

з)(1) $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{4}, \\ \cos 2x+2\cos y=1; \end{cases}$

и)(7) $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\frac{1}{\cos y}}=5, \\ 2^{\cos x+\frac{1}{\cos y}}=4. \end{cases}$

13(3). При каких a система

$$\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a \end{cases}$$

имеет решение? Найдите его.

14(3). Найдите a, при котором один из корней уравнения

$$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$$

вдвое больше другого.

15(3). При каких a разность корней уравнения

$$2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$$

равна их произведению?

16(1). Найдите наибольшее и наименьшее среди тех целых чисел n, при которых имеет действительные корни уравнение

$$nx^2+8x+n+8=0.$$

Анализ

1(3). Постройте графики:

а) $y=|\lg|x-1||$; б) $y=|\sqrt{|x-1|}-2|$;

в) $y=|3^{|x-1|}-3|$.

2. Исследуйте на экстремум функции:

а)(9) $y=\sqrt{2x^2-x+3}$;

б)(9) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$;

в)(2) $f(x)=(2x-1)e^{1/x}$.

3(7). Исследуйте функцию $y=f(x)$ на возрастание (убывание) и экстремумы, если

а) $f(x)=x^4(x-12)^2$,

б) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

4(11). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=6x-x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.

5(2). Найдите наибольший объем цилиндра, который можно вписать в конус с радиусом R и высотой H.

6(2). Из всех конусов, описанных около шара радиусом R, найдите тот, который имеет наименьший объем.

Геометрия

1(11). Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

2(6). Площадь прямоугольного треугольника равна 54, а катеты его относятся как 3:4. Определите площадь круга, описанного около треугольника.

3(9). В треугольнике известны длины двух сторон a и b и угол между ними α. Найдите длину биссектрисы этого угла.

4(6). Сумма длин диагоналей ромба равна 5, а площадь ромба — 2. Найдите его сторону.

5(9). Около круга, радиус которого равен 4, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 36. Найдите периметр треугольника.

6(1). AB — диаметр окружности радиусом r, MN — хорда. Отрезки AB и MN не пересекаются. Прямые AM и BN пересекаются в точке C, лежащей вне круга, причем $AC=a$, $BC=b$. Найдите MN.

7(9). В окружность радиусом R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг квадрат. Определите сторону квадрата.

8(9). Радиусы концентрических окружностей относятся как 7:4, а ширина кольца равна 12. Определите радиус меньшей окружности.

9(3). Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее на две равновеликие фигуры ($a>b$).

10(3). В равнобочной трапеции отношение оснований равно 0,75; средняя линия трапеции равна ее высоте и равна 7. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции.

11(3). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

12(11). Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a и острый угол равен α. Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен φ. Найдите объем пирамиды.

13(7). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

14(1). В прямоугольном треугольнике ABC известны длины катетов a и b. Точка O находится в плоскости треугольника и удалена от вершин острых углов на расстояние, равное $\frac{5}{8}$ длины гипотенузы, а от вершины прямого угла — на большее расстояние. Найдите расстояние от точки O до вершины прямого угла.

15(6). В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на отрезке $[B_1C_1]$ так, что выполняется соотношение $\frac{|B_1M|}{|B_1C_1|}=\frac{2}{3}$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

16(7). Шар радиусом R вписан в конус; из центра шара образующую конуса видно под углом α. Найдите объем конуса.

17(6). В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и апофемой m вписан конус. Найдите площадь его полной поверхности.

18(7). Определите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

19(1). В конус вписаны два касающихся друг друга шара радиусов r и R. Найдите площадь части поверхности конуса, заключенной между линиями касания конуса с шарами.

Физика

Механика

1(3). Торможение электропоезда метро началось на расстоянии $l_0=200$ м от станции. На каком расстоянии от станции окажется поезд, идущий со скоростью $v_0=30$ м/с, через $t=7$ с после начала торможения с ускорением $a=-5$ м/с^2?

2 (1). Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $H=680$ м. Выстрел произведен вертикально вверх; сопротивление движению пули со стороны воздуха отсутствует. Какова начальная скорость пули, если скорость звука $v=340$ м/с?

3 (4). В комедии А. С. Грибоедова «Горе от ума» есть строки:

Строжайше б запретил я этим господам
На выстрел подъезжать к столицам.

Выразите это расстояние в метрах для случая, когда выстрел производится из пушки под углом $\alpha=30°$ к горизонту, а верхняя точка траектории полета снаряда находится на высоте $H=3125$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

4 (5). Даны кинематические уравнения движения тела: $x=R\sin\omega t$, $y=R\cos\omega t$. Найдите его траекторию и ускорение (модуль и направление). Каков смысл постоянных R и ω?

5 (6). Вагон, масса которого $m=16$ т, двигаясь по инерции со скоростью $v=36$ км/ч, останавливается, пройдя расстояние $l=0{,}5$ км. Вычислите силу трения.

6 (10). Автомобиль массой $m=2\cdot10^3$ кг, двигаясь из состояния покоя по горизонтальному пути, через $t=10$ с от начала движения достигает скорости $v=20$ м/с. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. Определите силу тяги двигателя автомобиля. Результат представьте в килоньютонах (кН). Принять $g=10$ м/с^2.

7 (5). Найдите силу трения, если коэффициент трения $\mu=0{,}5$, масса тела $m=0{,}6$ кг, а приложенная под углом $\alpha=30°$ к горизонту сила равна $F=2$ Н (рис. 1).

8 (1). Вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, груз может скользить равномерно. Какой путь пройдет этот груз до остановки, если ему сообщить начальную скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости?

9 (1). Тело массой m скользит по гладкому горизонтальному столу и растягивает пружину, с помощью которой оно крепится к стене (рис. 2). Найдите наибольшее ускорение тела, если его скорость при нерастянутой пружине была равна v_0. Жесткость пружины k.

10 (1). Шарик массой m вращается с постоянной угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости на стержне длиной l, жестко закрепленном на оси AB (рис. 3). С какой силой шарик действует на стержень?

11 (11). Радиус рукоятки колодезного ворота в 3 раза больше радиуса вала, на который наматывается трос. Какова линейная скорость конца рукоятки при поднятии ведра с глубины $h=10$ м за $t=20$ с?

12 (6) Определите мощность, развиваемую трактором, если в гору с уклоном $\alpha=30°$ он движется со скоростью $v=10$ м/с. Масса трактора $m=5$ т, коэффициент трения $\mu=0{,}3$.

13 (4). Самолет массой $m=1000$ кг должен набрать для взлета скорость $v=25$ м/с на полосе длиной $l=100$ м. Считая движение равноускоренным, оцените минимальное значение мощности моторов в момент взлета. Коэффициент трения $\mu=0{,}02$.

14 (10). С башни высотой $h=30$ м горизонтально брошен камень. Найдите потенциальную энергию камня

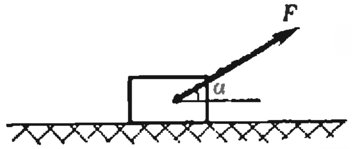


Рис. 1.

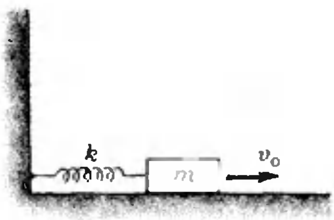


Рис. 2.

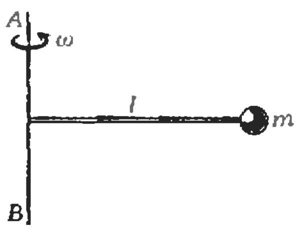


Рис. 3.

спустя $t=2$ с после начала движения. Масса камня $m=200$ г. Результат представьте в единицах СИ. Принять $g=10$ м/с^2.

15 (8). Шар массой m подвешен на нити длиной l. Такой маятник отклонили от положения равновесия на угол 90° и отпустили. При каком значении угла между нитью и вертикалью нить оборвется, если известно, что она выдерживает удвоенный вес шара?

16 (8). Упругий мяч падает с высоты $h=2$ м. После каждого удара мяч сохраняет $k=81$ % энергии. Через какое время мяч остановится?

17 (5). Три одинаковых упругих шарика висят на параллельных нитях одинаковой длины, касаясь друг друга. Один из шариков отклоняют перпендикулярно к прямой, соединяющей центры двух других шариков, и отпускают. Найдите скорости шариков после соударения, если в момент удара налетающий шарик имел скорость v_0.

18 (4). В зажатой между двумя телами пружине запасена энергия $W=100$ Дж. Масса одного тела $m_1=900$ г, а другого $m_2=100$ г. Как распределится энергия после освобождения пружины? Предполагается, что пружина отдает этим телам всю свою энергию.

19 (4). Какое максимальное количество теплоты выделится при столкновении пластилинового шара массой $m=200$ г, движущегося со скоростью $v=10$ м/с, с покоящимся шаром такой же массы?

20 (1). Тело массой m, утонувшее в жидкости плотностью ρ_1, давит на дно с силой F_1. Какая часть тела будет погружена в жидкость плотностью ρ_2, на поверхности которой оно плавает?

21 (10). Через какой промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебаний $T=24$ с, начальная фаза равна нулю, а колебания совершаются по синусоидальному закону? Результат представьте в единицах СИ.

22 (11). Маятник массой m отклонен от вертикали на угол α. Какова сила натяжения нити при прохождении маятником положения равновесия?

Молекулярная физика

1 (11). Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если угловое смещение в опыте Штерна составляло $\varphi=5{,}4°$ при частоте вращения прибора $n=150$ с$^{-1}$? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами $d=2$ см.

2 (6). Какова максимальная разница зимой и летом при нормальном атмосферном давлении ($p=10^5$ Н/м^2) в массе воздуха, заполняющего помещение объемом $V=100$ м^3, если летом температура в помещении повышается до $t_1=30$ °С, а зимой падает до $t_2=10$ °С? Масса киломоля воздуха $M=29$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\cdot10^3$ Дж/(кмоль·К).

3 (3). Газ изотермически сжали от первоначального объема $V_1=0{,}15$ м^3 до $V_2=0{,}1$ м^3. Давление при этом повысилось на $\Delta p=20$ Па. Каково было первоначальное давление газа?

4 (6). Колба объемом $V=500$ см^3, содержащая воздух, нагревается до температуры $t_1=227$ °С, после чего опускается горлышком в воду. Какая масса воды будет затянута в колбу в момент, когда температура колбы понизится до $t_2=27$ °С? Изменением объема колбы пренебречь.

5 (8). Два сосуда одинаковой емкости содержат воздух: один при температуре T_1 и давлении p_1, другой при температуре T_2 и давлении p_2. Сосуды соединяют, и после выравнивания давлений и температур воздух оказывается нагретым до температуры T. Какое давление устанавливается при этом?

6 (8). Смешали $V_1=1$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_1=20$ % и $V_2=2$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_2=30$ %. При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определите относительную влажность смеси.

7 (10). С какой высоты должен падать град (с температурой 0 °С), чтобы градинки при ударе о землю расплавились? Сопротивление воздуха не

учитывать. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot 10^5$ Дж/кг, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Ответ выразите в километрах (км).

Электродинамика

1 (3). В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре заряда: два из них равны $+q$ и два $-q$. Определите напряженность электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата. Рассмотрите все возможные случаи.

2 (5). Два одинаковых металлических шарика радиусом a каждый составляют конденсатор. Расстояние r между шариками настолько велико, что можно принять распределение зарядов на их поверхностях равномерным. Вычислите емкость такого конденсатора, рассмотрев предельный случай $r\to\infty$.

3 (11). Заряды $q_1=40$ нКл и $q_2=-10$ нКл расположены на расстоянии $l=10$ см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где следует его поместить, чтобы система находилась в равновесии? Устойчивым или неустойчивым будет равновесие?

4 (10). Шарик, имеющий массу $m=0{,}4$ г и заряд $q=4{,}9\cdot 10^{-7}$ Кл, подвешен на нити в однородном электрическом поле, силовые линии которого горизонтальны. На какой угол от вертикали отклонится при этом нить, если напряженность поля $E=8{,}0\cdot 10^3$ В/м? Результат представьте в градусах. Принять $g=9{,}8$ м/с^2.

5 (6). К проволочному кольцу присоединены подводящие провода. В каком отношении точки присоединения делят длину окружности, если общее сопротивление получившейся цепи в 6,25 раза меньше сопротивления кольца?

6 (8). К батарее с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В подключены последовательно амперметр и вольтметр. Когда параллельно вольметру подключили резистор, показание амперметра удвоилось, а показание вольтметра уменьшилось вдвое. Определите показание вольтметра до подключения резистора. Сопротивления резистора и приборов, а также внутреннее сопротивление источника не известны.

7 (10). При силе тока $I_1=4$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1=18$ Вт, при силе тока $I_2=2$ А — соответственно $P_2=10$ Вт. Определите ЭДС батареи. Результат представьте в единицах СИ.

8 (1). При перемещении заряда $q=20$ Кл по проводнику сопротивлением $R=0{,}5$ Ом совершена работа $A=100$ Дж. Найдите время, в течение которого по проводнику шел ток, считая его постоянным.

9 (11). Троллейбус массой $m=11$ т движется равномерно со скоростью $v=36$ км/ч. Найдите силу тока в обмотке двигателя, если напряжение $U=550$ В и КПД $\eta=80\,\%$. Коэффициент сопротивления движению $\mu=0{,}02$.

10 (4). Нагреватель электросамовара состоит из двух элементов. При подключении к сети первого элемента вода в самоваре закипает через $t_1=15$ мин, при подключении только второго элемента — через $t_2=20$ мин. Через сколько времени закипит вода в самоваре, если подключить к сети оба элемента: а) последовательно, б) параллельно?

11 (3). Батарея, имеющая ЭДС $\mathscr{E}=60$ В и внутреннее сопротивление $r=4$ Ом, замкнута на внешнюю цепь, потребляющую мощность $P=200$ Вт. Определите силу тока в цепи, падение напряжения на внешней цепи, сопротивление внешней цепи.

12 (6). Катушка диаметром $d=0{,}4$ м находится в переменном магнитном поле. При изменении индукции магнитного поля на $\Delta B=127{,}4$ Тл в течение $\Delta t=2$ с в обмотке катушки возбуждается ЭДС индукции $\mathscr{E}=200$ В. Сколько витков имеет катушка?

13 (11). Скорость самолета с реактивным двигателем $v=950$ км/ч. Найдите ЭДС индукции, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля $B=5\cdot 10^{-5}$ Тл и размах крыльев самолета $l=12{,}5$ м.

14 (4). К конденсатору, заряд которого $q=2{,}5\cdot 10^{-10}$ Кл, подключена

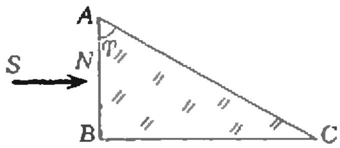


Рис. 4.

катушка индуктивности. Определите максимальный ток, протекающий через катушку, если частота свободных колебаний образованного контура $\nu=4\cdot10^7$ Гц. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

15 (5). Луч SN падает на прямую треугольную призму перпендикулярно грани AB (рис. 4). Преломляющий угол призмы $\varphi=60°$. Найдите угол отклонения луча от первоначального направления после прохождения призмы. Показатель преломления призмы $n=3/2$.

16 (8). В блоке оптического стекла с показателем преломления $n=\sqrt{3}$ имеется наполненная воздухом полость в виде плоскопараллельной пластинки толщиной $h=0{,}2$ см. Луч света падает на границу раздела стекло — воздух под углом $\alpha=30°$. Определите смещение луча после прохождения через воздушную полость.

17 (10). Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка наблюдается под углом $\varphi=14°$. Под каким углом виден максимум третьего порядка? Результат представьте в градусах и округлите до целого числа.

Элементы теории относительности

1 (10). На сколько увеличится масса пружины жесткостью $k=10$ кН/м при ее растяжении на $x=3$ см (1 кН $=10^3$ Н). Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с. Результат представьте в аттокилограммах (1 акг $=10^{-18}$ кг).

Квантовая физика

1 (3). Определите длину волны излучения, кванты которого имеют такую же энергию, что и электрон, пролетевший разность потенциалов $U=4{,}1$ В.

Публикацию подготовили *А. А. Егоров, В. А. Тихомирова*

Ответы, указания, решения

Решения нестрогих неравенств

1. $\{0\}\cup[1;\infty)$.
2. $[2-\sqrt{6};\ 2-\sqrt{2}]\cup\{2+\sqrt{6}\}$.
3. $[-2;1]\cup\{3\}$.
4. $\{5\}\cup(4+\sqrt{2};\infty)$.
5. $(-4;-3)\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup(-2;-1)$.
6. $\{0\}\cup[\log_5 3;\infty)$.

Парообразование. Свойства паров

1. $p_н=\dfrac{mRT}{MV\varphi/100\,\%}=1910$ Па.
2. $V=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/\varphi=2{,}7$ л.
3. Нет, не вся.
4. $m_в=\dfrac{MV}{R}\left(\dfrac{p_{н1}\varphi/100\,\%}{T_1}-\dfrac{p_{н2}}{T_2}\right)=0{,}027$ кг.
5. $m_в=V(\rho_{н1}\varphi_1/100\,\%-\rho_{н2}\varphi_2/100\,\%)=86$ кг.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1987 году

Математика

Алгебра

1. 51. **2.** 48 км/ч. **3.** 4 м/с, 3 м/с. **4.** 45,6 км/ч, 147 м. **5.** 25 %. **6.** 20. **7.** 7/5. **8.** 945.

10. а) $\{3\}$; б) $\{1;3\}$; в) $\{\sqrt{5};5\}$; г) $\{10^{-\sqrt{3/2}}, 1, 10^{\sqrt{3/2}}\}$; д) $\{1/2;1/4\}$; е) $\{20\}$; ж) $\{3;3+\sqrt{2}\}$; з) $\{10;10^4\}$; и) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n\in Z$; к) $x=\frac{\pi}{24}(6n+(-1)^n)$, $n\in Z$; л) $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $k\in Z$; м) $x_1=\frac{\pi}{3}(3k+(-1)^k)$, $x_2=\pm\frac{5\varphi}{6}+2\pi l$, $k, l\in Z$; н) $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$; о) $x_1=\operatorname{arctg}1/2+\pi(2k+1)$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $k, n\in Z$; п) $x=n$, $n\in Z$; р) $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3m+1)$, $x_3=\frac{\pi}{6}(6n-1)$; $k, m, n\in Z$; с) $x_1=\pi k/4$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2m+1)$, $k, m\in Z$; т) $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{1}{6}+\pi m$, $k, m\in Z$; у) $x_1=5$, $x_2=k\pi$, $k\in Z$; ф) $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k\in Z$.

11. а) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; б) $\left(\frac{2}{3};4\right)$; в) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}};2\right]$; г) $(-\infty;-3]\cup[0;16/11)$;

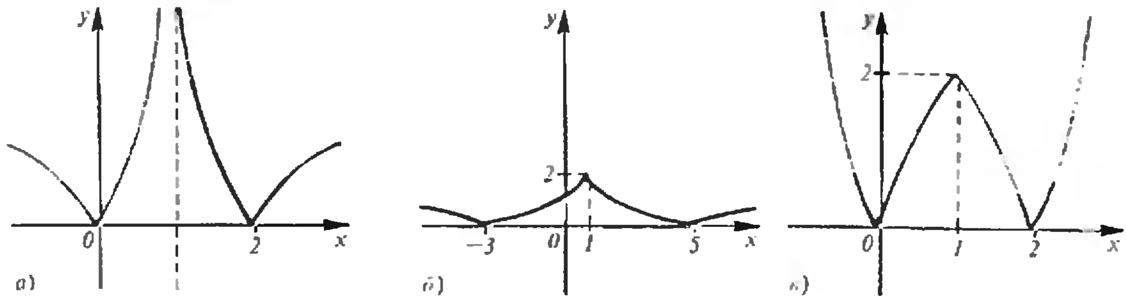


Рис. 1.

д) $(0; \log_3 4/3]$; е) $[-29/9; -5/3)$; ж) $(0; 1/4) \cup (1; 8)$; з) $(-3; -2) \cup (0; 2)$; и) $(1; 3/2) \cup (2; 5/2) \cup (3; \infty)$; к) $(2^{-\sqrt{2}}; 1/2) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$; л) $(1000; \infty)$; м) $(1-\sqrt{5}; -1) \cup (2; 1+\sqrt{5})$; н) $(0, (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2; 3)$ при $0 < a < 1$; $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ при $a > 1$; $(0; (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2; 3)$ при $a=0$; $\varnothing$ при остальных a.

12. а) $\{(-5; -7); (7; 5)\}$; б) $\{(2; 1)\}$; в) $\{(5{,}5; 0{,}5)\}$; г) $\{(4^{-2}; 4^{-1}); (4^{-1}; 4^{-2})\}$; д) $\{(4; 1)\}$; е) $\{(11; 5)\}$; ж) $\{(5; 27); (-3; 3^{-5})\}$;

з) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4k \pm 1); \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)\right)\right\}$, $k, n \in Z$;

и) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l\right)\right\}$, $k, l \in Z$.

13. $\left(\frac{1-2a^2}{1-a^2}; \frac{a}{1-a^2}\right)$ при $a \neq \pm 1$.

14. $a=-4$. **15.** $a=2$. **16.** -9, 1.

Анализ

1. См. рис. 1 (*а, б, в*).

2. а) $x_{min}=1/4$; б) $x_{min}=-1$, $x_{max}=3$; в) $x_{min}=1/6$.

3. а) $(-\infty; 0)$ и $(3; 12)$ — промежутки убывания $(0; 8)$ и $(12; \infty)$ — промежутки возрастания, $x=0$ и $x=12$ — точки минимума, $x=8$ — точка максимума;

б) $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1)$ и $(1; 2)$ — промежутки убывания, $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума.

4. $\max f(x)=f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$, $\min f(x)=f(3)=-9$.

5. $\pi R^2 H/27$. **6.** Конус с высотой $4R$ и радиусом основания $R\sqrt{2}$.

Геометрия

2. $56{,}25\pi$. **3.** $\frac{2ab \cos \gamma/2}{a+b}$. **4.** $\sqrt{17}/2$. **5.** 80.

6. $r(a^2+b^2-4r^2)/ab$. **7.** $R/\sqrt{2}$. **8.** 16.

9. $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.** 5.

11. $\frac{4}{3} l^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}$.

12. $\frac{a^3}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$. **13.** $\arccos \sqrt{2/3}$.

14. $\frac{1}{8}\sqrt{25(a^2+b^2)+48ab}$.

15. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$.

16. $-\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha$. **17.** $\frac{\pi a}{4}(a+2m)$.

18. $\frac{l\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2+\operatorname{tg} \alpha}}$. **19.** $4\pi Rr$.

Физика

Механика

1. $l=l_0-(v_0 t_0+a t_0^2/2)=110$ м, где $t_0=-v_0/a=6$ с — время до полной остановки поезда.

2. $v_0=v+gH/(2v) \approx 350$ м/с.

3. $l=4H \operatorname{ctg} \alpha \approx 21\,650$ м.

4. Уравнение траектории: $x^2+y^2=R^2$. Это уравнение окружности, радиус которой равен R. Ускорение тела направлено по радиусу к центру окружности и равно по модулю $a=\omega^2 R$, где ω — круговая частота.

5. $F_{тр}=mv^2/(2l)=1{,}6$ кН.

6. $F_т=m(\mu g+v/t)=6$ кН.

7. $F_{тр\ покоя}=F \cos \alpha \approx 1{,}7$ Н.

8. $l=v_0^2/(4g \sin \alpha)$.

9. $a_{max}=v_0\sqrt{k/m}$.

10. $F=m\sqrt{g^2+\omega^4 l^2}$.

11. $v=3h/t=1{,}5$ м/с.

12. $N=mgv(\sin \alpha+\mu \cos \alpha) \approx 380$ кВт.

13. $N_{min}=mv(\mu g+v^2/(2l)) \approx 83$ кВт.

14. $W=mg(h-gt^2/2)=20$ Дж.

15. $\alpha=\arccos 2/3 \approx 48°$.

16. $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \approx 12$ с.

17. $v_1=-v_0/5$; $v_2=v_3=2\sqrt{3}v_0/5$.

18. $W_1=Wm_2/(m_1+m_2)=10$ Дж; $W_2=Wm_1/(m_1+m_2)=90$ Дж.

19. $Q=mv^2/4=5$ Дж.

20. $\frac{V_2}{V}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{mg}{mg-F_1}$.

21. $t=T/12=2$ с.

22. $T=mg(3-2\cos \alpha)$.

Молекулярная физика

1. $v=2\pi nd/\varphi=200$ м/с.

2. $m_2-m_1=pVM(T_1-T_2)/(RT_1T_2)=8{,}1$ кг.

3. $p_1=\Delta p V_2/(V_1-V_2)=40$ Па.

4. $m_в=\rho_в V(1-T_2/T_1)=0{,}2$ кг.

5. $p=\frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right)$.

6. $\varphi=(\varphi_1 V_1+\varphi_2 V_2)/(V_1+V_2) \approx 27\,\%$.

7. $h=\lambda/g=33$ км.

Электродинамика

1. $E=0$, если на концах диагонали находятся

одноименные заряды, и $E=\sqrt{2}q/(a^2\pi\varepsilon_0)$, если на концах диагонали находятся разноименные заряды.
2. $C=\pi\varepsilon_0 a(1+a/r)$.
3. $q_3=40$ нКл; этот заряд должен находиться на расстоянии 10 см от второго заряда и на расстоянии 20 см от первого заряда; равновесие неустойчивое.
4. $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{qE}{mg}=45°$.
5. $l_1:l_2=1:4$.
6. $U=2/3\mathscr{E}=4$ В.
7. $\mathscr{E}=\dfrac{P_2I_1^2-P_1I_2^2}{I_1I_2(I_1-I_2)}=5{,}5$ В.
8. $t=q^2R/A=2$ с.
9. $I=\mu mgv/(\eta U)=50$ А.
10. а) $t=t_1+t_2=35$ мин; б) $t=t_1t_2/(t_1+t_2)\approx8{,}6$ мин.
11. Возможны два случая: 1) $I_1=10$ А, $U_1=20$ В, $R_1=2$ Ом; 2) $I_2=5$ А, $U_2=40$ В, $R_2=8$ Ом.
12. $n=\dfrac{4\mathscr{E}}{\pi d^2(\Delta B/\Delta t)}=25$.
13. $\mathscr{E}=Blv\approx165$ мВ.
14. $I_m=2\pi\nu q\approx0{,}06$ А.
15. $\delta\approx41°$ (на грани AC луч испытывает полное отражение).
16. $d=h=0{,}2$ см.
17. $\varphi'=\arcsin(3/2\sin\varphi)=21°$.

Элементы теории относительности
1. $\Delta m=kx^2/(2c^2)=50$ акг.

Квантовая физика
1. $\lambda=hc/(eU)=3\cdot10^{-7}$ м.

Головоломки
(см. 4-ю с. обл.)
1) Чтобы снять челнок в позиции В надо сначала продеть в него $(k-1)$-е кольцо — это потребует L_{k-1} ходов — и снять k-е кольцо (1 ход). Получится позиция В, но для меледы с $k-1$ кольцами. Теперь, чтобы освободить челнок, нужно выполнить еще L_{k-1} ходов. Итак, $L_k=2L_{k-1}+1$. Если в исходном положении челнок пройдет через все k колец (рис. А), то сначала нужно снять с него кольца 1, 2, ..., $k-2$ (M_{k-2} ходов), а затем k-е кольцо. Заключительные L_{k-1} ходов такие же, как в первом случае. Таким образом, $M_k=M_{k-2}+1+L_{k-1}$.
2) Переписав соотношение для L_k в виде $L_k+1=2(L_{k-1}+1)$ и замечая, что $L_1=1$, получим: $L_k+1=2^k$, т. е. $L_k=2^k-1$. Следовательно, $M_k=M_{k-2}+2^{k-1}$, причем $M_1=1$, $M_2=2$. Отсюда легко вывести формулы: $M_k=(2^{k+1}-1)/3$ при нечетном k, $M_k=(2^{k+1}-2)/3$ при четном k. Обозначим через i операцию снятия i-го кольца с челнока, через i' — операцию продевания этого кольца в челнок, через f_k — последовательность ходов для освобождения челнока в позиции В. Рассуждая так же, как в задаче 1), получим, что $f_k=f_{k-1}^{-1}kf_{k-1}$, где f_{k-1}^{-1} — операция, обратная к f_k. Полагая $f^{-1}gf=f*g$, можно переписать это равенство в виде $f_k=f_{k-1}*k=(f_{k-2}*(k-1))*k=...=(...((1*2)*3)*...$ $...*(k-1))*k$; например, для $k=3$ $f_3=1'2'131'21$. Последовательность для снятия челнока в позиции А при произвольном нечетном k выглядит так: $13f_25f_4 ... kf_{k-1}$, а при четном k — $214f_36f_5 ... kf_{k-1}$.
Решение задачи 3) оставляем читателям: никаких принципиальных отличий от случая меледы здесь нет.

Архимедова сила в литературных произведениях
(см. «Квант» № 5)
1. Архимедова сила не возникает, так как под лодкой нет воды.
2. Плотность соленой воды больше, чем плотность пресной.
3. Плотность воды уменьшается с повышением температуры.
4. Условие равновесия листа с грузом массой m — $F_A=mg$, (считаем массу листа много меньшей массы груза), т. е.
$$\rho_в gV=mg\ \Rightarrow\ \rho_в\pi\frac{d^2}{4}\cdot\frac{h}{2}=m;$$
здесь $d\approx2$ м — диаметр листа, $h\approx0{,}07$ м — высота заборчика, $\rho_в\approx10^3$ кг/м^3 — плотность воды. Отсюда $m\approx110$ кг.
5. $F_A=(m_л+m_к)g$, т. е. $\rho_вV_л=\rho_лV_л+m_к$. Объем льдины $V_л=Sh$. Положим толщину льда равной $h\approx0{,}5$ м, массу коровы $m_к\approx500$ кг. Тогда площадь льдины —
$$S=\frac{m_к}{(\rho_в-\rho_л)h}\approx\frac{500}{(1\cdot10^3-0{,}9\cdot10^3)\cdot0{,}5}\ м^2=10\ м^2.$$
6. Ратибор сможет опуститься на дно, если действующая на него сила тяжести будет больше архимедовой силы.
7. $F_A=10m_зg+\rho_дgV_д\ \Rightarrow\ V_д=\dfrac{10m_з}{\rho_в-\rho_д}$.
Если масса зайца $m_з\approx3$ кг, плотность дерева (сосны) $\rho_д=0{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, то минимальный объем бревна $V_д\approx0{,}06$ м^3.
8. Стебель куги полон воздушных ячеек.
9. Давление атмосферы убывает с высотой. Давление газа в оболочке воздушного шара тоже уменьшается по мере подъема (уменьшается температура), но медленнее, чем внешнее давление. Силы давления газа изнутри могут разорвать оболочку.
10. Дирижабли не требуют затраты энергии для поддержания их в воздухе.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)
1. Чтобы победить Змея-Горыныча, Иван-царевич должен срубить четное число голов. Новые головы появляются лишь при отрубании хвостов. Так как хвостов три, то при отрубании всех хвостов вырастает не меньше двух новых голов. Значит, четное число голов должно быть уже не меньше, чем шесть. Шесть голов получится, если сначала по очереди отрубить каждый из трех хвостов, затем срубить трижды по паре хвостов. После этого нужно срубить трижды по паре голов. Всего 9 ударов.
2. Если предположить, что сложение было выполнено правильно, то две последние цифры дают в сумме число 15, две предпоследние — 13, далее 11, 15 и 13. Сумма этих чисел равна 67; но это — удвоенная сумма цифр первого числа, так что нечетное число получиться не

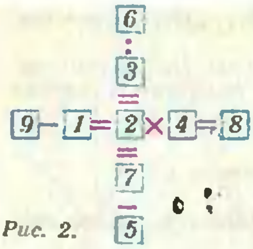


Рис. 2.

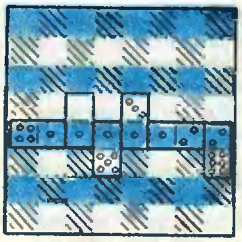


Рис. 3.

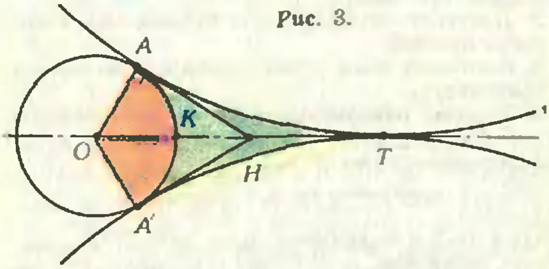


Рис. 4.

может. Значит, Вася, складывая пятизначные числа, ошибся.

3. См. рис. 2.

4. Верно. Так как в сумме вертикально и горизонтально расположенных костяшек у нас 32, достаточно убедиться в том, что четным будет число костяшек, расположенных вертикально. Для этого окрасим горизонтальные ряды полей шахматной доски через один в синий цвет (рис. 3). Каждая вертикальная костяшка покрывает одно поле на какой-либо синей полосе. Число вертикальных костяшек, которые покрывают по одному полю на любой фиксированной синей полосе, должно быть четным. Значит, общее число вертикально расположенных костяшек четно.

5. Возьмем окружность радиусом 1 с центром O и построим к ней касательную окружность большого радиуса R (например, $R=1000$). Из точки O проведем касательную OT к большой окружности и возьмем третью окружность, симметричную второй относительно OT (рис. 4). Тогда зеленый криволинейный треугольник $AKA'T$ имеет площадь S, заведомо превосходящую площадь первого круга (равную π). В самом деле, площадь четырехугольника $AOA'H$ равна $OA\cdot AH=AH$, но $AH>10$ (что легко проверить двухкратным применением теоремы Пифагора). Площадь красной фигуры меньше $\pi/2$, поэтому

$$S=\text{пл.}(OAHA')-\text{пл.}(OAKA')>10-\pi/2>\pi.$$

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)

Головоломки

1. См. рис. 5.

2. ПОДУМАЙТЕ=461 897 253.

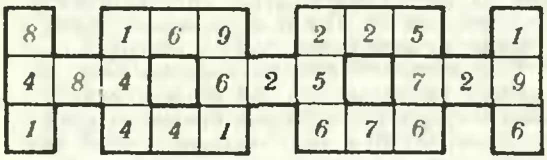


Рис. 5.

Квант

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Т. Н. Кольченко, Э. В. Назаров, Е. К. Тенчурина, И. Е. Смирнова, П. Н. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил
Э. Гунченко

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 15.04.88. Подписано к печати 27.05.88. Т-12536. Бумага 70×100/16. Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 27,09. Усл. печ. л. 6,45. Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 197 364 экз. Цена 40 коп. Заказ 928

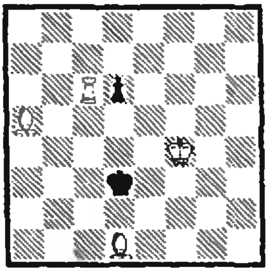
Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

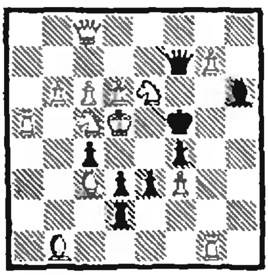
КОМПЬЮТЕР ОПРОВЕРГАЕТ

Все чаще и чаще машины с большим быстродействием используются для проверки правильности шахматных задач, оказывая неоценимую помощь композиторам. Через компьютеры были «просеяны» многие сборники задач, и нередко обнаруживался брак. Одни задачи содержали побочные решения и дуали, в других мат ставился быстрее, чем задумывал автор, третьи вообще не решались. Любопытно, что опровержения порой отличаются изяществом и вызывают удивление самих авторов. Кстати, обнаружены изъяны даже в произведениях знаменитых проблемистов.



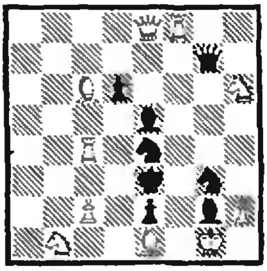
С. Лойд, 1867 г. Мат в 4 хода.

Содержащееся в книгах решение миниатюры знаменитого композитора и гроссмейстера математических головоломок довольно симпатично: 1. Cc3 d5 2. Kpf3 d4 3. Cb3 dc 4. Лd6×. Машина указала грубое побочное решение: 1. Cb6! Kpd2 2. Kpf3 Kp:d1 (2... Kpd3 3. Ce3 и 4. Ce2×) 3. Ce3 и 4. Лc1×; 1. ...d5 2. Kpf3 d4 3. Ce2+ Kpd2 4. Ca5×.



Л. Лошинский, Л. Гугель, В. Шиф, 1932 г. Мат в 2 хода.

Авторский замысел заключается в 1. К:d3 с угрозой 2. Кр:c4×. На 1. ...Ф:g7 (Фf6, С:g7, Лb2, Лa2) с целью перекрыть пятую линию следует 2. К:g7 (соответственно Kd4, Лg5, Kb2, Kb2)×. Не помогает и 1... Фa7 (Ф:e6) — 2. Kc7 (Ф:e6)×. Кажется, все в порядке, но вмешивается компьютер и находит блестящее опровержение — 1...Фd7!! и мата нет.

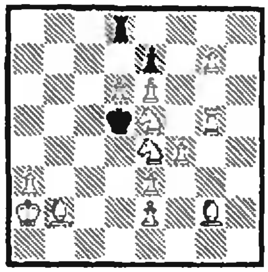


В. Сычев, 1983 г. Мат в 3 хода.

Автор указывает такое вступление: 1. Фe6! Теперь создана угроза 2. Лc3+ С(К):c3 3. Cf2×, 2...Kpd4 3. Фd5×. Вариантов здесь немало, но черный конь и слон то и дело попадают под связки: 1...Cf6 2. Cd2+! Kpf3 3. Лc3×, 1...Cf4 2. Cf2+! Kpf3 3. Kd2×. Еще один мат со связкой завершает игру после 1... d5 — 2. Ф:e5 Ф:f8 3. Лc3×, 2...Ф:e5 3. Kg4×. Наконец, 1...Ф:f8 (Kf5) 2. Cd2+ и мат следующим ходом. Вроде все убедительно. И тем не менее задача опровергается первым же ходом, причем опровержение столь неожиданно, что найти его может только машина! Эффектный скачок коня в угол доски: 1...Kh1!! и мата, а стало быть и задачи, нет.

После этих примеров можно, пожалуй, согласиться с композиторами, которые любят повторять парадоксальный тезис: нет задач правильных, а есть неопровергнутые!

Любопытно, что гроссмейстер по шахматной композиции Я. Владимиров никогда не расстается с шахматным компьютером. Вот четырехходовка, которую совсем недавно ему удалось довести до совершенства с помощью электронного помощника.



Я. Владимиров, 1987 г. Мат в 4 хода.

Основные варианты решения: 1. Cd4! Лg8 2. Cb6 Л:g7 3. Kc5+ Kp:d6 4. Kc4×, 1...Лc8 2. Kc5+ Kp:d6 3. Kf7+ Kpc7 4. Ka6×, и еще два тематических варианта: 1... Лa8 2. Ch3!, и черные в цугцванге, так как ладья не может удержать контроль одновременно над полями a5 (3. Kc4+, 4. Ka5×) и d8 (3. Kf7+, 4. Kd8×); 1... Лb8 2. f5!, и нельзя парировать 3. Kc3+ и 4. Kb5× или 3. Kf6+ и 4. Ke8×.

Претензий к задаче нет, но сначала гроссмейстеру казалось, что черную ладью лучше расположить на g8. Компьютер тут же указал красивое побочное решение: 1. Kc5+! Kp:c5 2. Kc4+!! Kp:c4 3. Лa5 и 4. Cd5×, 1...Kp:d6 2. Kf7+ Kpc7 3. Kd7! и 4. Лc5×.

Этот пример показывает, что компьютер может помогать композиторам не только в проверке задач на корректность, но и в чисто творческих вопросах.

Стоит остановиться еще на одном вопросе. При массовом распространении микро-ЭВМ шахматные конкурсы могут потерять свое значение. Участник конкурса поручит решать задачу машине, а сам отправится в кино. Впрочем, большинство любителей решают задачи для своего удовольствия, и им нет резона эксплуатировать машину. Ну, а что касается конкурсов, то композиторы должны придумывать головоломки похитрее, чтобы машине они оказывались не по зубам!

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Задача в головоломке «чертов цветок» — снять с «цветка» веревочную петлю. Если бы проволока, из которой сделан «цветок», была достаточно мягкой, мы бы просто вытащили самый высокий «стебель» из охватывающих его колец (схема внизу), затем точно так же последовательно расцепили остальные «стебли», и тогда ничто не мешало бы преспокойно снять веревочку. Но такое «решение» правилами игры запрещено. Понять, как на самом деле отцепляется петля, будет проще, если разобраться в более известном, можно сказать, классическом варианте этой головоломки — меледе (рис. А). Здесь вместо веревочки — жесткая проволочная петля-челнок, а вместо «цветка» — цепочка подвижных колец на стержнях, которые могут перемещаться по вертикали.

Занумеруем кольца, как на рисунке А. Заметим, что снять k-е кольцо с челнока можно лишь тогда, когда в него продето еще и $(k-1)$-е кольцо, а кольца с меньшими номерами сняты (рис. Б). Будем считать операцию продевания кольца в челнок или снятия кольца с челнока одним ходом. Пусть L_k и M_k — наименьшее число ходов, необходимое для того, чтобы снять с меледы с k кольцами челнок, зацепленный за одно кольцо (рис. В) и, соответственно, за все кольца (рис. А).

1) Докажите, что $L_k=2L_{k-1}+1$, $M_k=M_{k-2}+L_{k-1}+1$.

2) Выразите L_k и M_k через k, напишите соответствующие последовательности ходов.

3) Как снять веревочку с «чертова цветка»?

Решить эти задачи вам поможет сделанное выше замечание, а ответы и указания помещены на с. 79.

В. Д.